Tema 1: ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS Y CONTRASTE DE HIPÓTESIS.

1.1. Introducción
1.2. Objetivos
1.3. Distribuciones muestrales
 1.3.1. Distribución muestral de la media
 1.3.2. Distribución muestral de la proporción
 1.3.3. Distribución muestral de la varianza
1.4. La estadística inferencial
 1.4.1. Estimación de parámetros
  1.4.1.1. Intervalo de confianza de la media
  1.4.1.2. Intervalo de confianza para la proporción
  1.4.1.3. Intervalo de confianza para la varianza
 1.4.2. Amplitud del intervalo de confianza y su relación con el tamaño muestral
 1.4.3. Contraste de hipótesis
  1.4.3.1. Metodología clásica del contraste de hipótesis
  1.4.3.2. Errores al tomar una decisión en un contraste de hipótesis
1.5. Ejercicios de autoevaluación

1.1.- Introducción

En la asignatura de primer curso "*Introducción al análisis de datos*" se han estudiado procedimientos para organizar, representar y describir un conjunto de datos -bien mediante la creación de tablas, gráficos o calculando medidas que nos informan de su tendencia central, variabilidad, forma, relación, etc.- de tal forma que, de forma resumida, nos proporcionan un conocimiento eficaz y con sentido de las características de la muestra. En esta asignatura de segundo vamos a dar un paso adelante con el objetivo de utilizar esta información para que, mediante la inferencia y el contraste de hipótesis, podamos hacer generalizaciones referidas a la población a partir del análisis descriptivo de una, dos, o más muestras. Este conocimiento siempre será aproximado o, dicho con otras palabras, esta inferencia siempre será probabilística.

En este primer capítulo abordamos los fundamentos de la inferencia estadística, rama de la Estadística que permite realizar afirmaciones sobre una población a partir de los datos obtenidos en alguna de las muestras que se pueden extraer de la misma. En el proceso de inferencia hay que seguir unas pautas para que las afirmaciones que hagamos finalmente referidas a la población, y las correspondientes decisiones que tomemos respecto a ella, sean lo más racionales posibles. En este proceso inferencial se pueden distinguir básicamente los siguientes pasos: extracción de la muestra, medición de la(s) característica(s) objeto de nuestro interés, cálculo del estadístico en la muestra para inferir el parámetro de la población, y evaluación probabilística del error que podemos cometer al realizar dicha inferencia.

De manera resumida, explicaremos los fundamentos teóricos y los aspectos prácticos del proceso de inferencia, repasando un concepto fundamental, sin el cual no es posible comprender cómo se produce la inferencia, y que se conoce como **distribución muestral**, que ya fue tratado en el tema 8 de la asignatura de "*Introducción al análisis de datos*" y al cual remitimos al estudiante que por algún motivo no ahondó lo suficiente en este concepto. Posteriormente abordamos los procedimientos de estimación de parámetros, así como las propiedades que debe tener un estimador para que cumpla bien su función de estimar el parámetro que se desea conocer en la población[1].

Finalmente, explicamos con cierta amplitud la metodología del contraste de hipótesis sobre parámetros de una población, proceso íntimamente relacionado con el proceso de estimación. En los epígrafes dedicados a los contrastes de hipótesis, además de la metodología, se tratan aspectos sustantivos de los contrastes tales como los posibles errores que se pueden cometer al hacer una inferencia, y un concepto que está en boga desde los años ochenta del pasado siglo, como es el de la magnitud o *tamaño del efecto*, y que ya es preceptivo referir en cualquier informe de investigación empírica.

En cualquier caso, el estudiante debe saber que la temática que se trata en este texto asume conocimientos previos tratados en la asignatura de primer curso de tal forma que se suponen adquiridos los conceptos básicos de análisis descriptivo de los datos, probabilidad, el cálculo de las probabilidades en las distribuciones discretas y continuas e, íntimamente relacionadas con éstas últimas, el concepto de distribución muestral. Adquiridos estos conceptos a los que nos hemos referido, en este primer tema marcamos los siguientes objetivos.

[1] El concepto de *parámetro* se explica detenidamente en el tema 9 sobre contrastes no paramétricos.

1.2.- Objetivos:

- Conocer cómo es la distribución muestral de los estadísticos media, varianza y proporción.
- Calcular intervalos de confianza de los parámetros poblacionales media, varianza y proporción.
- Calcular el tamaño de la muestra en función de la precisión de la estimación deseada.
- Comprender e interpretar la lógica de la metodología del contraste de hipótesis.
- Reconocer e identificar los errores y riesgos de todo contraste de hipótesis.

1.3.- Distribuciones muestrales

La inferencia estadística es una forma de razonamiento que va de lo concreto a lo general. El investigador, para confirmar o refutar las hipótesis teóricas que maneja, extrae una muestra representativa de la población objeto de estudio y sobre ella realiza las mediciones de las características relevantes para su investigación. Para cada característica evaluada se obtiene uno, o más, valores numéricos que se conocen como estadísticos, los cuales pueden ser cualquiera de los estudiados en la asignatura de primer curso (medidas de tendencia central, de posición, de variabilidad, de asimetría, de relación, de regresión, etc.). Y es a partir de los diversos estadísticos obtenidos en la muestra (lo concreto) que tiene que realizar afirmaciones sobre los valores de los parámetros de la población (lo general). Pero ¿cómo se realiza ese salto de lo concreto a lo general? Para entender este proceso es preciso, previamente, recordar lo que se conoce como distribución muestral, y para ello hay que situarse en un plano hipotético en el que pudiéramos tratar con todas las posibles muestras del mismo tamaño, n, que se pueden extraer de una población de tamaño N (siendo, obviamente, N > n).

Razonando en este escenario hipotético en el que pudiéramos extraer todas las muestras de la población, en cada una de estas muestras se realizaría la medición de la o las variables de interés y se obtendría un estadístico (media, proporción, varianza, correlación, etc.) cuyo valor será diferente (o igual) al obtenido en cualquiera de las otras posibles muestras ya que, obviamente, depende de los datos que la componen. Es decir, el estadístico obtenido en cada una de las distintas muestras se comporta como una variable aleatoria, y sus diferentes valores forman una distribución de probabilidad que recibe el nombre de *distribución muestral*. Como en toda distribución, también de la distribución muestral de uno de estos estadísticos obtenido para todas las muestras posibles, podemos obtener su media y su desviación típica. Esta última, al estar referida a la distribución muestral de un estadístico, recibe el nombre de **error típico** del estadístico.

De modo que el concepto de distribución muestral hay que distinguirlo de otros tipos de distribuciones, como son, la **distribución poblacional,** que se refiere a la distribución de los datos individuales en la población, y la **distribución en la muestra** que es la distribución de una parte de estos datos individuales que constituyen la muestra.

Una vez que hemos repasado el concepto de distribución muestral, vamos a abordar de manera muy resumida cómo son las distribuciones muestrales de tres estadísticos ampliamente utilizados en la investigación social: la media, la proporción y la varianza y recordando que las dos primeras ya fueron tratadas en el curso anterior, y veremos cómo la forma que adopta la distribución muestral depende, entre otras cosas, de la forma que adopte la distribución poblacional.

1.3.1. Distribución muestral de la media

Consideremos una población formada por todos los estudiantes universitarios de una determinada comunidad de los que podemos conocer, a partir de sus datos de la matrícula, su edad. A partir de estos datos podemos calcular su edad media y la varianza de esta misma variable (edad), valores que representamos por $\mu \; y \; \sigma^2$, respectivamente (si dispusiéramos de más de una variable, sería recomendable indicar, mediante subíndices, a qué variable se corresponde cada media y varianza, de tal forma que en este caso podríamos indicarlo como $\mu_{edad}\ y\ \sigma^2_{edad}$). De esta población podemos extraer una muestra de, por ejemplo, 100 estudiantes y calcular su media y desviación típica que representamos por $\bar{Y}\ y\ S_Y$ si representamos la variable por Y o por $\bar{X}\ y\ S_X$ si la representamos con la letra X. Pero esta muestra no es la única posible. Se pueden extraer muchas otras muestras diferentes, todas ellas del mismo tamaño (n=100), y en cada una de ellas calcular su media y desviación típica que variarán de una muestra a otra, de tal manera que con las puntuaciones de todas las medias obtenidas en estas distintas muestras (véase Figura 1.1) se origina otra distribución que se llama ***distribución muestral de la media***. Con el mismo procedimiento se obtendría la distribución muestral de la desviación típica o de cualquier otro estadístico, como la proporción, la correlación de Pearson, etc. y corresponde a la distribución de probabilidad de un estadístico que se obtiene al calcularlo en todas las posibles muestras del mismo tipo y tamaño, n, extraídas de una población de tamaño N.

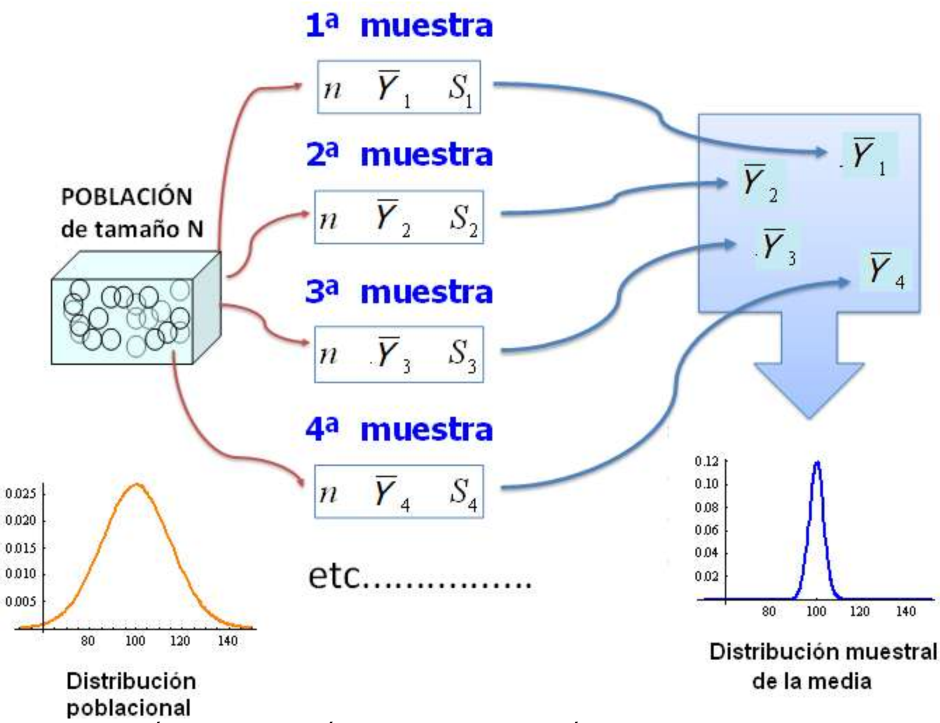


Figura 1.1: Proceso de construcción de la distribución muestral para el estadístico media. A la izquierda aparece la representación de una variable en una población de tamaño N. Esta variable es normal con media 100 y desviación típica 15. A la derecha se muestra la distribución muestral teórica del estadístico Media calculado en todas las muestras posibles de tamaño n. Obsérvese que ambas distribuciones (la poblacional y la muestral) tienen la misma media pero la distribución muestral tiene una variabilidad muy inferior a la variabilidad de la distribución poblacional.

Como se estudió en el tema 8 de la asignatura "*Introducción al análisis de datos*", podemos suponer que la distribución muestral de la media es normal, o se aproxima suficientemente a la normalidad, cuando se cumple **al menos una** de las siguientes condiciones:

- La variable en la población se distribuye normalmente.
- La variable en la población NO se distribuye normalmente, pero el tamaño de la muestra es igual o superior a 30 observaciones (Teorema Central del Límite).

En la asignatura "Introducción al Análisis de Datos", estudiamos que si se desconoce la forma de la distribución poblacional de la variable, la forma de la distribución muestral de la media depende del tamaño de la muestra. **El Teorema Central del Límite (TCL)** establece que sin importar la forma de la distribución poblacional, la distribución muestral de la media se aproximará a la normal a medida que aumenta el tamaño de la muestra. Y el tamaño que debe tener la muestra para que la distribución muestral se considere normal depende de la forma que tenga la distribución poblacional, de tal forma que cuanto más se aleje ésta de la distribución normal mayor tendrá que ser el tamaño de la muestra. Por otro lado, si asumimos que la mayoría de las variables que se utilizan en las ciencias sociales no se alejan en exceso de la distribución normal, vamos a considerar que una muestra es grande a partir de $n \geq 30$.

Cuando realizamos inferencia estadística sobre la media aritmética, **siempre ha de cumplirse al menos una de las dos condiciones descritas**, pero procederemos de forma diferente en función de si la varianza poblacional es conocida o desconocida.

1.- Así pues, si **conocemos la desviación típica poblacional** σ, y podemos asumir que la variable en la población se distribuye normalmente, o bien, que $n \geq 30$, entonces consideramos que la distribución muestral del estadístico media es también normal, cuya media y desviación típica (o error típico de la media) son, respectivamente:

$$\mu_{\bar{Y}} = \mu$$

$$\sigma_{\bar{Y}} = \sigma/\sqrt{n}$$

Obsérvese que para diferenciar los parámetros poblacionales ($\mu\ y\ \sigma$) de los parámetros de la distribución muestral de la media ($\mu_{\bar{Y}}$ y $\sigma_{\bar{Y}}$) hemos incluido en esta última un subíndice que señala el estadístico sobre el que se ha calculado la distribución muestral.

Obviamente, si tipificamos el valor del estadístico media $\bar{Y}$ que se distribuye normalmente, obtenemos la variable Z:

$$Z = \frac{\bar{Y} - \mu}{\sigma_{\bar{Y}}} = \frac{\bar{Y} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

cuya distribución será normal, $N(0,1)$, lo cual permite conocer mediante las tablas de la curva normal la probabilidad asociada a cada valor del estadístico $\bar{Y}$ en la distribución muestral, o la distancia, en términos probabilísticos, desde la media de una muestra concreta, $\bar{Y}$, a la media de la población μ (que coincide con la media de la distribución muestral, $\mu_{\bar{Y}}$).

2.- No obstante, si, como suele ser habitual en la práctica investigadora, **se desconoce la varianza de la variable en la población**, pero podemos asumir que la distribución poblacional es normal o bien que $n \geq 30$, los estudios realizados por W.S. Gosset al final del siglo XIX demostraron que en estas circunstancias la distribución muestral de la media es una distribución diferente de la normal, que se conoce con el nombre de **distribución t de Student** ([2]). Bajo estas condiciones Gosset demostró que la variable:

[2] Este fue el pseudónimo que tuvo que utilizar Gosset para poder publicar sus investigaciones sobre la distribución t ya que su contrato laboral con la cervecera Guinness le impedía publicar con su nombre verdadero.

$$T = \frac{\overline{Y} - \mu}{S_{n-1} / \sqrt{n}} = \frac{\overline{Y} - \mu}{S_n / \sqrt{n-1}}$$

sigue el modelo *t* de Student con *n-1* grados de libertad, donde S_{n-1} y S_n son, respectivamente, la cuasidesviación típica y la desviación típica de la muestra, ambas vistas el curso anterior.

Recuerde el lector que, en la asignatura de Introducción al Análisis de Datos, se describían las características de las distribuciones Z y t, indicando que la distribución normal estándar es simétrica con media 0 y varianza 1 mientras que la distribución t de Student es también simétrica con media cero pero varianza igual a n/n-2. Es fácil deducir, por tanto, que a medida que aumenta el valor de *n*, la varianza de la distribución t se van aproximando a 1, y por tanto su distribución de t se irá aproximando a la normal de puntuaciones Z. En las tablas que manejamos en este curso, podemos consultar valores para distribuciones t de Student hasta 100 grados de libertad. Podemos comprobar que para dichos grados de libertad los valores que nos ofrece la tabla son muy parecidos a los de la curva normal tipificados, por lo que, **cuando los grados de libertad sean superiores a 100, podemos utilizar los valores de la tabla de curva normal**.

Veamos un ejemplo:

Ejemplo 1.1: Supongamos que en un determinado Estado la población de escolares es evaluada sobre conocimientos matemáticos básicos. Las puntuaciones en la población se distribuyen normalmente con media $\mu = 50$ y desviación típica $\sigma = 12$. Si de esta población se extrae una muestra aleatoria de 121 sujetos: ¿cuál es la probabilidad de obtener una media de 52 puntos o superior?; ¿cuál es la probabilidad de obtener una media que esté comprendida entre 48 y 51 puntos?

Partimos de una distribución poblacional normalmente distribuida con media 50 y desviación típica 12 por lo que la distribución muestral de la media es también normal (con media igual a 50 y desviación típica igual a $^{12}/_{\sqrt{121}}$).

Bajo estas condiciones, calculamos la puntuación típica correspondiente al valor 52, de esta distribución muestral de medias:

$$z = \frac{52 - 50}{12 / \sqrt{121}} = 1{,}83$$

y de acuerdo a la distribución normal tipificada la probabilidad de obtener puntuaciones típicas de 1,83 o superior, o lo que es igual, de obtener una media de 52 puntos o superior es igual a 0,0336. Es decir, es poco probable encontrar de esa población una muestra de 121 elementos y que tenga 52 puntos de media o superior. En la Figura 1.2(a) se representa el área correspondiente a esta probabilidad.

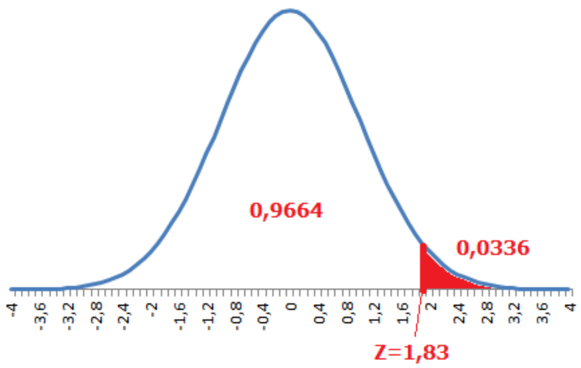


Figura 1.2 (a). Probabilidad de encontrar valores iguales o mayores de 52 en la distribución muestral de media 50 y desviación típica $12/\sqrt{121}$

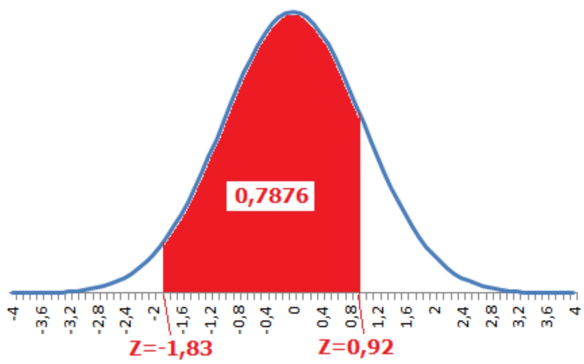


Figura 1.2 (b). Probabilidad de encontrar valores comprendidos entre 48 y 51 en la distribución muestral de media 50 y desviación típica $12/\sqrt{121}$

Para la segunda cuestión hay que calcular las puntuaciones típicas correspondientes a 48 y 51, y determinar la probabilidad asociada a sus correspondientes valores z.

$$z = \frac{48-50}{12/\sqrt{121}} = -1{,}83 \qquad ; \qquad z = \frac{51-50}{12/\sqrt{121}} = 0{,}92$$

De acuerdo a la distribución normal tipificada la probabilidad, comprendida entre estas dos puntuaciones que se representan en la Figura 1.2 (b), son:

$$P(-1{,}83 \leq Z \leq 0{,}92) = P(Z \leq 0{,}92) - P(Z \leq -1{,}83) = 0{,}8212 - 0{,}0336 = 0{,}7876$$

Como hemos comentado previamente, este ejemplo podríamos resolverlo de la misma forma si se desconociera la forma de la distribución poblacional. Bajo estas nuevas condiciones la distribución muestral de la media sería la distribución t con n-1 g.l. (concretamente 120 g.l.). Al ser los grados de libertad superiores a 100 (que es el valor más alto que podemos consultar en las tablas), el resultado sería prácticamente igual al obtenido utilizando puntuaciones Z.

1.3.2. Distribución muestral de la proporción

En el ámbito de las Ciencias Sociales es habitual dirigir nuestra atención a situaciones en las que no estamos interesados en la media de la muestra sino que queremos investigar la proporción de personas que votarán a un determinado partido político, que presentan un determinado síntoma, o que, en definitiva, cumplen una determinada condición a la que genéricamente llamaremos "éxito". En estas situaciones tenemos que apoyarnos en la distribución muestral de la proporción, la cual se genera con la misma lógica que la distribución muestral de la media, con la única diferencia de que al extraer todas las posibles muestras de tamaño n de la población, el estadístico que se calcula en cada una de ellas es la proporción p=x/n donde x es el número de datos de la muestra que cumplen la condición designada como "éxito" y n es el tamaño de la muestra.

Entonces, si llamamos π a la proporción de casos que cumplen una determinada condición en una población de tamaño N y extraemos todas las posibles muestras aleatorias de tamaño *n*, en la que definimos la variable *P* = "Proporción de aciertos", la distribución muestral de la proporción es la distribución de probabilidad del conjunto de todas las proporciones, P, obtenidas en todas las muestras posibles de tamaño n, extraídas de una población de tamaño N. La variable aleatoria P, sigue el modelo de probabilidad *binomial*, cuya media y desviación típica son, respectivamente:

$$\mu_p = \pi$$

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{\pi \cdot (1-\pi)}{n}}$$

Como sabemos por los temas ya estudiados en el primer curso, las probabilidades asociadas a cada valor de *P* se pueden buscar en las tablas de distribución binomial con parámetros *n* y π.

Por otra parte, la distribución binomial -igual que la χ^2, la *t* de Student o la *F* de Snedecor-Fischer- se aproxima a la normal a medida que aumenta el tamaño de la muestra, y por tanto se puede generar una nueva variable:

$$Z = \frac{P-\pi}{\sigma_P}$$

cuya distribución es la normal tipificada.

Ejemplo 1.2: Una escuela de educación primaria está compuesta por un 40% de niños y un 60% de niñas. Si se elige una muestra aleatoria de 20 alumnos, ¿cuál será la probabilidad de que haya más de 9 niños?

La probabilidad de que en una muestra de 20 alumnos haya más de 9 niños, siendo la proporción de éstos en la población $\pi = 0{,}40$, se obtiene recurriendo a la distribución binomial con parámetros n=20 y $\pi = 0{,}40$, la probabilidad pedida es, utilizando la expresión de su función de distribución, la siguiente[3]:

$$P(y>9) = 1 - P(y \leq 9) = 1 - \sum_{y=0}^{9} \binom{20}{y} \cdot 0{,}40^{y} \cdot 0{,}60^{20-y} = 1 - 0{,}7553 = 0{,}2447$$

Y utilizando la distribución normal, tipificamos la proporción de niños obtenida en la muestra P=9/20=0,45

$$Z = \frac{P-\pi}{\sigma_P} = \frac{0{,}45 - 0{,}40}{\sqrt{\frac{0{,}40 \cdot 0{,}60}{20}}} = \frac{0{,}05}{0{,}1095} = 0{,}46$$

[3] Valor que también podríamos obtener recurriendo a la tabla de la distribución binomial como se estudió en el Tema 6 de la asignatura de *Introducción al Análisis de Datos.*

$$P(Z \leq 0{,}46) = 0{,}6772$$
$$P(Z > 0{,}46) = 1 - P(Z \leq 0{,}46) = 1 - 0{,}6772 = 0{,}3228$$

Los resultados obtenidos por los dos procedimientos no coinciden pero la diferencia encontrada va desapareciendo a medida que aumenta el tamaño de la muestra, ya que el ajuste de la distribución binomial a la normal es más exacto. Esta diferencia entre la probabilidad calculada mediante la distribución binomial (discreta) y la calculada mediante la curva normal (de parámetros media igual a $n \times \pi$ y varianza igual a $n \times \pi \times (1- \pi)$) se debe a que esta última es continua. Si en vez de utilizar el punto P = 0.45 correspondiente a 9 éxitos utilizamos el punto medio entre 9 y 10 éxitos (P = 9.5 / 20 = 0.475) y repetimos los pasos anteriores obtendríamos un valor de 0.2483, bastante cercano al inicial (0.2447). En la Figura 1.3 se muestra la diferencia entre ambas perspectivas. Parece obvio que la segunda es más aproximada, aunque dependa de introducir como aproximación un valor (y = 9.5) que no puede producirse jamás en la distribución binomial ya que esta exige valores enteros.

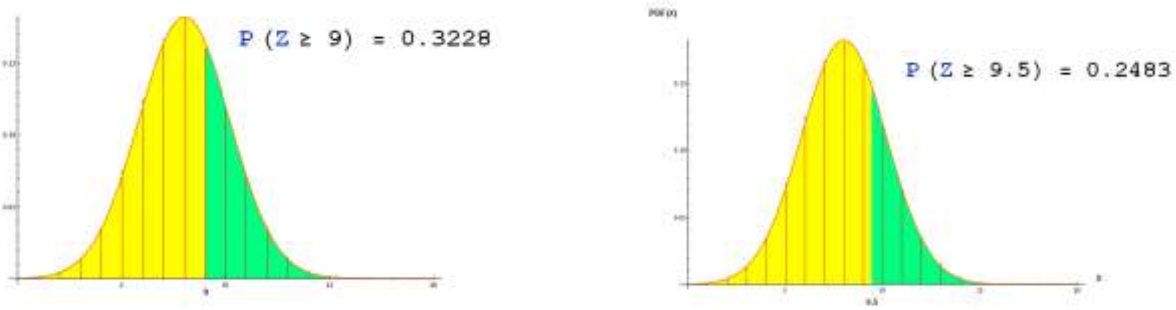


Figura 1.3: efecto de utilizar y = 9 o y = 9.5 sobre las probabilidades para calcular la aproximación de la normal a la binomial. La curva continua es la curva normal con la misma media y desviación típica que la binomial. Las líneas verticales representan la función de probabilidad de la binomial.

1.3.3. Distribución muestral de la varianza

La varianza es una medida de dispersión que permite determinar la variabilidad que presentan los datos recogidos en una variable objeto de estudio.

Recuerde que en la muestra podemos utilizar dos expresiones para el cálculo de la varianza, que reciben los nombres de:

Varianza muestral:

$$S_n^2 = \frac{\sum (Y-\bar{Y})^2}{n} = \frac{\sum Y^2}{n} - \bar{Y}^2$$

Cuasivarianza muestral o varianza insesgada:

$$S_{n-1}^2 = \frac{\sum (Y-\bar{Y})^2}{n-1}$$

Obsérvese, sin embargo que entre varianza y cuasi-varianza de la muestra existe la siguiente relación:

$$\left.\begin{array}{l} S_n^2 = \dfrac{\sum (Y-\bar{Y})^2}{n} \Rightarrow \sum (Y-\bar{Y})^2 = n \cdot S_n^2 \\ S_{n-1}^2 = \dfrac{\sum (Y-\bar{Y})^2}{n-1} \Rightarrow \sum (Y-\bar{Y})^2 = (n-1) \cdot S_{n-1}^2 \end{array}\right\} \Rightarrow (n-1) \cdot S_{n-1}^2 = n \cdot S_n^2$$

Por lo que la cuasi-varianza de la muestra se puede calcular a partir de la varianza de la muestra de acuerdo con la siguiente expresión:

$$S_{n-1}^2 = \frac{n}{n-1} \cdot S_n^2$$

No obstante, el proceso de construcción de una distribución muestral de varianzas no es tan inmediato como el de la media o el de la proporción, de modo que aquí nos limitaremos a describir cuál es la variable aleatoria, su distribución de probabilidad, sus medias -o valor esperado- así como su varianza y desviación típica.

La variable aleatoria que permite realizar afirmaciones sobre la varianza poblacional se puede generar a partir de cualquiera de las siguientes dos expresiones que parten de la cuasi-varianza o de la varianza de la muestra respectivamente:

$$X^2 = \frac{(n-1) \cdot S_{n-1}^2}{\sigma^2}$$

$$X^2 = \frac{n \cdot S_n^2}{\sigma^2}$$

que se distribuyen según χ^2_{n-1} (ji-cuadrado con $n-1$ grados de libertad). Es decir, mientras que en el primer caso de este capítulo calculábamos como estadístico de cada muestra, su media ($\bar{Y}$), en este caso para cada muestra calculamos el valor de χ^2, para el cual necesitamos calcular la varianza (o cuasi-varianza) muestral así como el valor de σ en la población. La distribución de los valores de X^2 en todas las muestras posibles se distribuirá según χ^2_{n-1} Teniendo en cuenta este modelo de probabilidad de la variable aleatoria así definida, su media y desviación típica son, respectivamente:

$$\mu_{X^2} = n - 1$$
$$\sigma_{X^2} = \sqrt{2 \cdot (n-1)}$$

Igual que sucedía antes, la distribución χ^2 se aproxima a la distribución normal a medida que aumentan sus grados de libertad, por lo que se puede construir, de nuevo, una variable aleatoria tipificada *Z* que siga una distribución normal tipificada, y cuya expresión es:

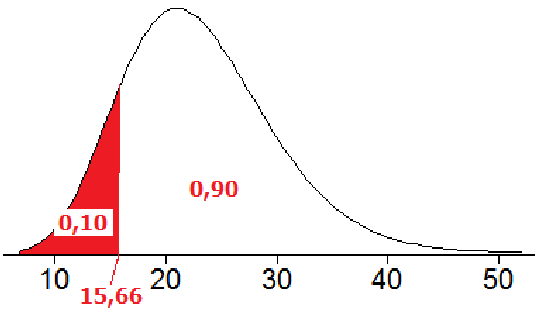
$$Z = \frac{X^2 - \mu_{X^2}}{\sigma_{X^2}} \Rightarrow \begin{cases} Z = \dfrac{\dfrac{(n-1)\cdot S_{n-1}^2}{\sigma^2} - (n-1)}{\sqrt{2\cdot(n-1)}} \\[2ex] Z = \dfrac{\dfrac{n \cdot S_n^2}{\sigma^2} - (n-1)}{\sqrt{2\cdot(n-1)}} \end{cases}$$

Ejemplo 1.3: Supongamos que la altura (en centímetros) de los recién nacidos en Méjico se distribuye normalmente con media 48 cm y desviación típica 6 cm, N(48;6). Si se selecciona una muestra de 25 recién nacidos, ¿cuál es la probabilidad de que la desviación típica de la muestra tome un valor inferior a 4,75 centímetros?

Utilizando la desviación típica de la muestra, el valor de la variable aleatoria es:

$$X^2 = \frac{n \cdot S_n^2}{\sigma^2} = \frac{25 \cdot 4{,}75^2}{6^2} = 15{,}66$$

que es un valor de una distribución χ^2 con 24 grados de libertad.



Si buscamos en la tabla de probabilidades de la distribución $\chi^2_{24\ g.l.}$, se observa que el valor 15,6587 que aparece en la tabla (el más aproximado a nuestro resultado) deja por debajo una probabilidad de 0,10. Por tanto, la probabilidad de que una muestra de 25 recién nacidos tenga una desviación típica inferior a 4,75 centímetros (o una varianza inferior a $4{,}75^2$) es aproximadamente de 0,10.

1.4. La estadística inferencial

Como se ha comentado en la introducción de este tema, la inferencia estadística nos va permitir inferir los parámetros de una, dos o más poblaciones a partir de la información recogida en las muestras. Esta inferencia o generalización de lo particular a lo general, la vamos a realizar mediante dos procedimientos íntimamente relacionados: la **estimación de parámetros** y el **contraste de hipótesis**. En ambos casos se trata de generalizar la información obtenida en una muestra a una población. Con la estimación tratamos de conocer el valor de uno o más parámetros correspondientes a una variable aleatoria poblacional, Y, a partir de los datos recogidos en una muestra. De forma alternativa, los procedimientos para el contraste de hipótesis (que son los más utilizados en la experimentación científica en el campo de las ciencias sociales y de la salud), nos permiten tomar una decisión sobre un valor hipotético que se formula como parámetro poblacional. El procedimiento se lleva a cabo analizando si determinadas características que hipotéticamente formulamos para definir la población pueden ser ciertas a partir de la información proporcionada por una muestra representativa de la misma.

Los procedimientos de contraste de hipótesis en los diseños de una, dos o más muestras que se verán en este curso se apoyan en el supuesto de que la muestra se ha seleccionado mediante muestreo aleatorio. Para ello, se tienen que cumplir dos condiciones: la muestra tiene que seleccionarse por algún procedimiento aleatorio y, en segundo lugar, todos los elementos de la población tiene la misma probabilidad de formar parte de la muestra. De esta forma, una muestra representativa es una reproducción a escala de la población a la que pertenece respecto a la o las variables que tratamos de estudiar. Por ejemplo si en la población de estudiantes de la UNED, el 60% son mujeres y de éstas el 40% tienen cargas laborales frente al 75% en los estudiantes varones y queremos estudiar cómo las variables sexo y cargas laborales influyen en el rendimiento académico es necesario que la muestra recoja este mismo reparto de proporciones respecto al sexo y cargas laborales. De no cumplirse esta condición, de los resultados observados en la muestra no se podrían hacer extrapolaciones válidas a la población general.

Aunque la estimación por intervalos y el contraste de hipótesis se tratan a continuación en epígrafes separados, veremos que son procedimientos complementarios de forma que los intervalos pueden aplicarse para el contraste de hipótesis y el contraste de hipótesis es una toma de decisión respecto al parámetro poblacional formulado.

1.4.1.- Estimación de parámetros

Un estimador es un estadístico calculado en una muestra que se utiliza para estimar un parámetro poblacional. Para cada parámetro (v.g la media poblacional) pueden existir diferentes estimadores (v.g. la media aritmética, la media cuadrática, la mediana, la moda). Para que un estimador realice buenas estimaciones del parámetro poblacional es preciso que tenga las cuatro propiedades que de forma muy resumida expondremos en las siguientes líneas. Para desvincular las propiedades de los estimadores de un parámetro concreto, designaremos de forma genérica con **U** al parámetro poblacional, con $\hat{U}$ a su valor estimado y con **u** a cualquier estadístico de la muestra que puede utilizarse como estimador. Por ejemplo, μ es el parámetro media poblacional y $\hat{\mu}$ su valor estimado. En este caso concreto, el estimador que se utiliza para estimar la media poblacional es el estadístico media aritmética de la muestra, $\hat{\mu} = \bar{Y}$. Es importante observar que, como hemos señalado al comienzo, podríamos haber elegido otros estadísticos muestrales como estimadores del parámetro media poblacional (v.g., la mediana, por citar algún otro de tendencia central). La cuestión es ¿cuál de los posibles estimadores deberíamos utilizar? Esto dependerá de la bondad de los mismos. Por lo tanto, es preciso saber qué hace que un estadístico, u, sea un buen estimador del parámetro[4].

[4] Obsérvese que para denotar que un estadístico concreto es estimador de un parámetro, lo denotamos poniendo el acento circunflejo sobre el parámetro a estimar. De esta forma, conceptualmente no es lo mismo la media como estadístico de una muestra ($\bar{Y}$) que la

Insesgado. Un buen estimador tiene que ser insesgado, lo cual supone que su valor esperado, $E(u) = U$, o media de su distribución muestral, μ_u, debe coincidir con el parámetro que estima. La media muestral, tal como hemos visto, es un estimador insesgado de la media poblacional, y lo mismo ocurre con la proporción, la cuasi-varianza muestral y otros estadísticos que veremos a lo largo del curso. Sin embargo la varianza muestral es un estimador sesgado de la varianza poblacional ya que su valor esperado o media no coincide con la varianza poblacional, es decir: $E(S_n^2) \neq \sigma^2$ (sin embargo, como veremos más adelante, $E(S_{n-1}^2) = \sigma^2$, por lo que la cuasivarianza muestral es un estimador insesgado de la varianza poblacional). Expresado, pues, de manera formal diremos que **u es un estimador insesgado de U, si su valor esperado o media coincide con el parámetro:** $\mu_u = U$

Eficiente o precisión. Además de que un estimador coincida, en promedio, con su parámetro, es bueno que la distribución del estimador tenga poca variabilidad para que, de esta forma, se aleje poco del parámetro y en consecuencia sea más preciso. Por tanto, entre dos estimadores de un mismo parámetro, es más preciso el que tenga varianza más pequeña.

Consistente. Como hemos visto al tratar la distribución muestral, raramente coincidirán los valores que el estimador adopta en muestras concretas con el parámetro debido a las fluctuaciones del muestreo. Si pensamos en la distribución muestral de la media es fácil observar que al aumentar más y más el tamaño de la muestra el estimador se va aproximando al parámetro a la vez que su varianza tiende a cero. Con esta idea, decimos que un estimador consistente es aquel que se concentra en un rango cada vez más estrecho alrededor de su parámetro a medida que aumenta el tamaño de la muestra. Tomando como referencia las dos propiedades anteriores, se puede afirmar que una de las condiciones que hace consistente un estimador es que tanto su sesgo como su varianza tiendan a cero a medida que aumenta *n*.

Suficiencia. Un estimador es suficiente si al estimar el parámetro utiliza toda la información de la muestra relacionada con el parámetro. La media, la varianza y la proporción son estimadores suficientes de sus respectivos parámetros, porque en todos ellos se utiliza la información de todos los elementos de la muestra. No así la mediana que solo indica cuál es el valor central de la distribución.

Los estadísticos que hemos estudiado en cursos anteriores, cuando se aplican a los valores de las muestras que extraemos de la población -y que habitualmente se representan con letras del alfabeto latino- son los estimadores que podemos utilizar para estimar los parámetros poblacionales –representados con letras del alfabeto griego- y los que mejor cumplen con estas condiciones se muestran en la Tabla 1, de tal forma que en cada línea aparece el mejor estimador muestral de cada parámetro:

Estadísticos de la muestra	Parámetros en la población
Media: $\overline{Y}$	Media: μ
Cuasi-varianza: S_{n-1}^2	Varianza: σ^2
Proporción: P	Proporción: π
Correlación: r_{XY}	Correlación: ρ_{XY}
Ecuación de regresión: $Y = b_0 + b_1 \cdot X$	Ecuación de regresión: $Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot X$

Tabla 1

media muestral como estimador de la media poblacional, es decir, $\hat{\mu} = \overline{Y}$. Aunque numéricamente valgan lo mismo, en el primer caso se la considera un simple índice descriptivo mientras que en el segundo se la considera un “representante” de la media poblacional y, además, un buen representante ya que nos sirve para inferir el valor μ desconocido.

Considerando estas propiedades que deben tener los (buenos) estimadores, la estimación de parámetros se realiza siguiendo dos procedimientos: la estimación puntual y la estimación por intervalos.

La estimación puntual consiste en utilizar el valor del estadístico calculado en la muestra como valor del parámetro que se desea estimar. Mediante este método se utiliza el estadístico obtenido en la muestra y se atribuye tal cual como parámetro de la población.

Sin embargo es poco probable que el valor del estadístico calculado en la muestra concreta coincida exactamente con el verdadero valor del parámetro y por ello es más interesante construir alrededor del estadístico de la muestra un intervalo, definido por su límite inferior y superior, que tenga en cuenta la precisión del estimador (su error típico) de forma que nos asegure, con una cierta probabilidad que el verdadero valor del parámetro se encuentra en esa franja de valores. A este método se le conoce como el cálculo de los ***intervalos de confianza*** en el ámbito de la estadística inferencial**.**

Por ejemplo, suponga que deseamos conocer el tiempo medio semanal que los estudiantes de psicología de la UNED dedican al estudio de una determinada asignatura. Mediante una encuesta realizada a una muestra representativa se obtiene una media de 6h/semanales. Este valor sería la estimación puntual para la media de todos los estudiantes. En otro caso, y mediante procedimientos que veremos más adelante podremos determinar que el tiempo medio que dedican los estudiantes al estudio es un valor comprendido entre 4,7h/semanales y 7,3 h/semanales con una probabilidad del 95%. Para llegar a estos resultados habremos utilizado los datos obtenidos en la muestra que ha sido encuestada y del conocimiento de las distribuciones muestrales de los estadísticos, con el doble objetivo tanto de asignar un valor del estadístico en la muestra que extraemos de la población, como estimación puntual de su parámetro, como para la estimación por intervalos.

1.4.1.1- Intervalo de confianza para la media

Para el cálculo del intervalo de confianza de la media hay que considerar las circunstancias bajo la cuales la distribución muestral de la media es una distribución normal o una distribución t de Student con n-1 grados de libertad. Para calcular el intervalo de confianza de la media aritmética (recordamos que siempre tiene que cumplirse una de las siguientes condiciones: distribución normal en la población, o bien, $\mathrm{n} \geq 30$). Para ilustrar el procedimiento nos apoyaremos en siguientes tres situaciones:

1.- **Varianza poblacional conocida $\boldsymbol{\sigma^2}$.** En estas circunstancias sabemos que la distribución muestral de la media es normal con media μ, y error típico igual a la desviación típica poblacional dividida por la raíz de n:

$$N\left(\mu\ ,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Se trata, por tanto, de determinar dos valores que definen un intervalo dentro del cual estimamos que se encontrará la media poblacional, μ, con una determinada probabilidad, que representamos por $1-\alpha$, y se denomina **nivel de confianza**. Teniendo en cuenta las propiedades de la distribución normal, si fijamos un nivel de confianza del $1-\alpha=0{,}95$ o del 95%, sabemos que a 1,96 desviaciones típicas a izquierda y derecha de la media de la distribución muestral, $\mu_{\bar{Y}}=\mu$, se encuentra el 95% de las medias de cualquier muestra, como se muestra en la Figura 1.4.

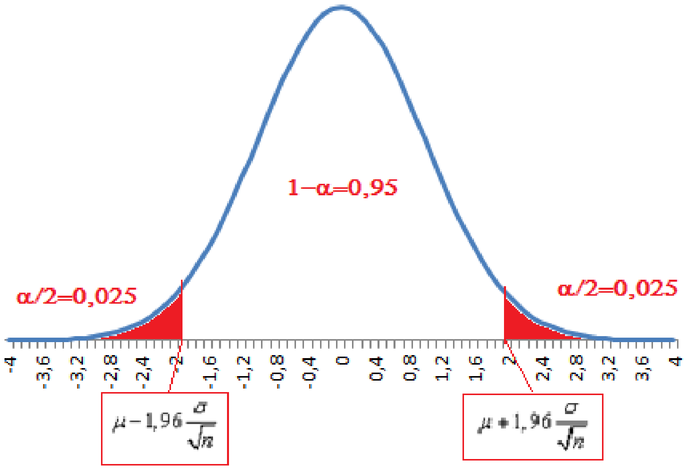


Figura 1.4. Distribución muestral de medias con intervalo del 95% alrededor del valor esperado

Es decir, en 95 de cada 100 muestras su media se encontrará dentro del intervalo $(\mu-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \mu+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$. Expresado formalmente el intervalo alrededor del parámetro, con un nivel de confianza del 95% (0,95) es:

$$P\left(\mu-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \overline{Y} \leq \mu+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=0.95$$

Resolviendo esta desigualdad se llega a la siguiente expresión que afirma que la probabilidad de que en un intervalo construido alrededor de la media de una muestra se encuentra el parámetro μ de la población con una probabilidad del 0,95 se calcula según:

$$P\left(\overline{Y}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{Y}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=0.95$$

En general, el intervalo de confianza para la media poblacional, estimado a partir de la media de la muestra y con un nivel de confianza de $1-\alpha$, es:

$$P(\overline{Y}-Z_{\alpha/2}\cdot\sigma_{\bar{y}} \leq \mu \leq \overline{Y}+Z_{1-\alpha/2}\cdot\sigma_{\bar{y}})=1-\alpha$$

Siendo el error típico de la media:

$$\sigma_{\overline{Y}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Efectivamente, la Figura 1.4 es la representación de las medias de todas las muestras de tamaño *n* que se pueden extraer de una población. De todas estas muestras, en el 95% de ellas su media se encontrará dentro de la zona central delimitada por los valores: $\mu - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y $\mu + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y sólo un 5% estarán fuera de ese zona. Por lo tanto, partiendo de la media de una muestra que se encuentre dentro de la zona central -aunque no necesariamente coincidiendo con la media poblacional, μ, ya que varía de una muestra a otra- construimos un intervalo con la misma amplitud que tendrá una probabilidad del 95% de contener la media poblacional. Si partimos de la media de una muestra que se encuentra fuera de la zona central del 95%, el intervalo de confianza que construyamos sobre ella no podrá incluir entre sus valores a la media de la población. Esto último sucederá, en promedio, en 5 de cada 100 muestras que extraigamos de la población. La representación gráfica de lo que acabamos de explicar se puede ver en la Figura 1.5.

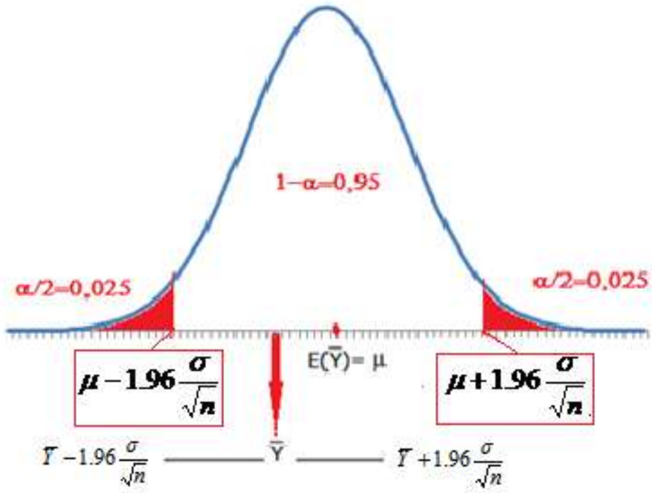


Figura 1.5. Intervalo de confianza de la media con un NC del 95%

2.- Varianza poblacional desconocida en muestras pequeñas (n<30). En la práctica estadística no es frecuente que se conozca la varianza poblacional. Lo habitual es desconocer tal dato que tendremos que estimar a partir de la varianza o cuasi-varianza de la muestra como un estimador de la varianza poblacional. En estas circunstancias la distribución muestral de la media es la distribución t de Student y, por tanto, el intervalo de confianza para la media poblacional, estimado a partir de la media de la muestra, $\bar{Y}$, y con un nivel de confianza de $1-\alpha$ es:

$$P(\bar{Y} - t_{\alpha/2} \cdot \sigma_{\bar{Y}} \leq \mu \leq \bar{Y} + t_{1-\alpha/2} \cdot \sigma_{\bar{Y}}) = 1 - \alpha$$

donde los valores de t son los que dejan un intervalo central correspondiente a una probabilidad de $1 - \alpha = 0{,}95$.

En estas circunstancias, es decir, cuando la varianza poblacional es desconocida, hay que estimarla a partir de su estimador (sesgado o insesgado) por lo que el error típico de la media, es:

$$\sigma_{\bar{Y}} = \frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}} = \frac{S_n}{\sqrt{n-1}}$$

Según se utilice la cuasi-desviación típica de la muestra (su estimador insesgado), en el primer caso, o la desviación típica de la muestra (estimador sesgado) en el segundo caso.

Ejemplo 1.4. En un experimento sobre atención, un psicólogo presenta durante 300 mseg un grupo de 16 letras del alfabeto (con una disposición de 4 filas y 4 columnas). Cada uno de los 12 sujetos que participan en el experimento debe verbalizar tantas letras como recuerde de cada presentación estimular. El promedio de letras bien recordadas es de 7 y la desviación típica insesgada (cuasi-desviación típica) es de 1,3. Asumiendo que la distribución en la población es normal (necesitamos este supuesto, porque la muestra es pequeña). ¿Entre qué límites se encontrará el verdadero promedio de palabras bien recordadas, con una probabilidad de 0,95?

Se desconoce la forma de la distribución poblacional y su varianza y, además, la muestra es pequeña, por lo que la distribución muestral de la media es la t de Student. En la distribución t de Student con 11 gl, (Figura 1.6a) buscamos los valores que dejan en la zona central una probabilidad de 0,95. Estos valores son -2,201 y +2,201 que se incluyen en la expresión general:

$$P(\bar{Y} - t_{\alpha/2} \cdot \sigma_{\bar{Y}} \leq \mu \leq \bar{Y} + t_{1-\alpha/2} \cdot \sigma_{\bar{Y}}) = 1 - \alpha$$

$$P(7 - 2{,}201 \cdot \frac{1{,}3}{\sqrt{12}} \leq \mu \leq 7 + 2{,}201 \cdot \frac{1{,}3}{\sqrt{12}}) = 0{,}95$$

$$P(6{,}174 \leq \mu \leq 7{,}826) = 0{,}95$$

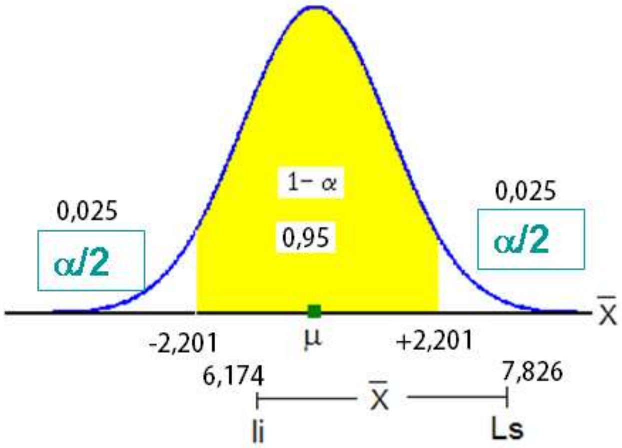


Figura 1.6a. Intervalo de confianza de la media en la distribución t

3.- Varianza poblacional desconocida en muestras grandes (n>100). En este caso, en teoría seguimos trabajando con una distribución t de Student con $n-1$ grados de libertad, pero conociendo las propiedades de esta distribución, sabemos que cuanto mayor sea el valor de los grados de libertad, más se aproxima la distribución t a la distribución normal. En las tablas que manejamos, podemos consultar valores en distribuciones t hasta cien grados de libertad. Para valores superiores a dichos grados de libertad podemos considerar que las diferencias entre los valores Z y t son prácticamente despreciables, por lo que utilizaremos las tablas de curva normal con muestras donde: $n > 100$.

Ejemplo 1.5. En un experimento sobre atención, un psicólogo presenta durante 300 mseg un grupo de 16 letras del alfabeto (con una disposición de 4 filas y 4 columnas). Cada uno de los 122 sujetos que participan en el experimento debe verbalizar tantas letras como recuerde de cada presentación estimular. El promedio de letras bien recordadas es de 7 y la desviación típica es de 1,3. ¿Entre qué límites se encontrará el verdadero promedio de palabras bien recordadas, con una probabilidad de 0,95?

Aunque se trata de una distribución t, (Figura 1.6 b) buscamos los valores que dejan en la zona central una probabilidad de 0,95 en la tabla Z, porque $n > 100$. Estos valores son -1,96 y +1,96 que se incluyen en la expresión general:

$$P(\overline{Y} - t_{\alpha/2} \cdot \sigma_{\overline{Y}} \leq \mu \leq \overline{Y} + t_{1-\alpha/2} \cdot \sigma_{\overline{Y}}) = 1 - \alpha$$

$$P(\overline{Y} - t_{\alpha/2} \cdot \frac{S_n}{\sqrt{n-1}} \leq \mu \leq \overline{Y} + t_{1-\alpha/2} \cdot \frac{S_n}{\sqrt{n-1}}) = 1 - \alpha$$

$$P(7 - 1{,}96 \cdot \frac{1{,}3}{\sqrt{122-1}} \leq \mu \leq 7 + 1{,}96 \cdot \frac{1{,}3}{\sqrt{122-1}}) = 0{,}95$$

$$P(6{,}768 \leq \mu \leq 7{,}232) = 0{,}95$$

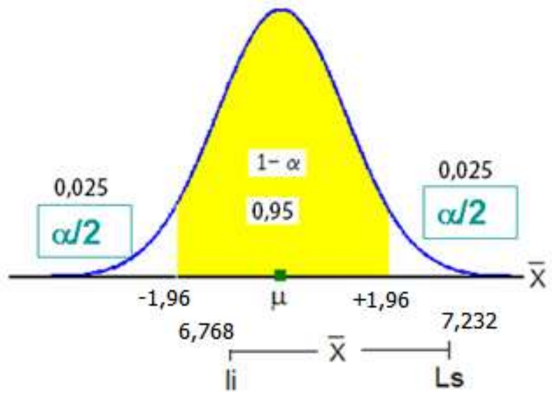


Figura 1.6b. Intervalo de confianza de la media en la distribución t

La interpretación correcta del intervalo de confianza es que dentro de él se encontrará, o no, el verdadero valor del parámetro, pero nos permite afirmar que si repitiésemos el proceso con muchas muestras del mismo tipo y tamaño, en una proporción igual a $(1-\alpha)$ los intervalos así construidos contendrán al verdadero valor del parámetro (promedio de palabras recordadas en la población). Y esta interpretación es la que hay que mantener para todo intervalo de confianza de cualquier otro parámetro poblacional que vayamos a estimar, no cayendo en el error de interpretarlo en el sentido de que una proporción de personas igual a $(1-\alpha)$ –en este ejemplo, el 95% de las personas- tienen un promedio de palabras recordadas comprendido entre 6,17 y 7,82.

1.4.1.2. Intervalo de confianza para la proporción

Sabemos que la distribución muestral de la proporción es una distribución binomial que se aproxima a la normal cuando se utilizan muestras grandes. Bajo estas condiciones, la distribución muestral de la proporción es normal con media y error típico iguales a:

$$\mu_p = \pi$$

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{\pi \cdot (1-\pi)}{n}}$$

Como la proporción poblacional, π, es un valor desconocido hay que estimarlo a partir de su estimador insesgado, la proporción muestral, p, y el error típico de la distribución muestral de la proporción queda de la siguiente forma:

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{\hat{\pi} \cdot (1-\hat{\pi})}{n}} = \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}$$

Teniendo en cuenta las propiedades de la distribución normal, si fijamos un nivel de confianza del $1-\alpha$ y siguiendo el mismo razonamiento utilizado para el caso de la media, partimos de la siguiente expresión:

$$P(\pi - Z_{\alpha/2} \cdot \sigma_P \leq p \leq \pi + Z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma_P) = 1 - \alpha$$

Resolviendo esta desigualdad se llega a la siguiente expresión que afirma que la probabilidad de que en un intervalo de confianza construido alrededor de la proporción de una muestra se encuentra el parámetro de la población es de $1-\alpha$.

$$P(p - Z_{\alpha/2} \cdot \sigma_P \leq \pi \leq p + Z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma_P) = 1-\alpha$$

O de forma más desarrollada:

$$P\left(p - Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}} \leq \pi \leq p + Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}\right) = 1-\alpha$$

Ejemplo 1.6: Para dejar constancia real de las preferencias de los padres sobre la lengua vehicular en la que prefieren que se eduque a sus hijos, una determinada asociación de padres realiza una encuesta sobre una muestra de 800 familias residentes en una determinada autonomía bilingüe, encontrando que 280 familias son partidarios de que todas de las asignaturas se enseñen en Castellano. Con un nivel de confianza del 95% ¿entre que valores se encontrará la proporción de padres que en esa Comunidad son partidarios de que todas las asignaturas se impartan en Castellano?

La proporción de familias partidarias de la enseñanza en Castellano obtenida en la muestra es p=280/800 = 0,35. Al tratarse de una muestra grande, la distribución binomial se aproxima a la normal. Buscamos en la tabla de la distribución normal los valores Z que dejan una probabilidad central del 95% y son -1,96 y +1,96 (Figura 1.7) y aplicamos la siguiente expresión:

$$L_{inf} = p - Z\alpha_{/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0{,}35 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}35.0{,}65}{800}} = 0{,}317$$

$$L_{sup} = p + Z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0{,}35 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}35.0{,}65}{800}} = 0{,}383$$

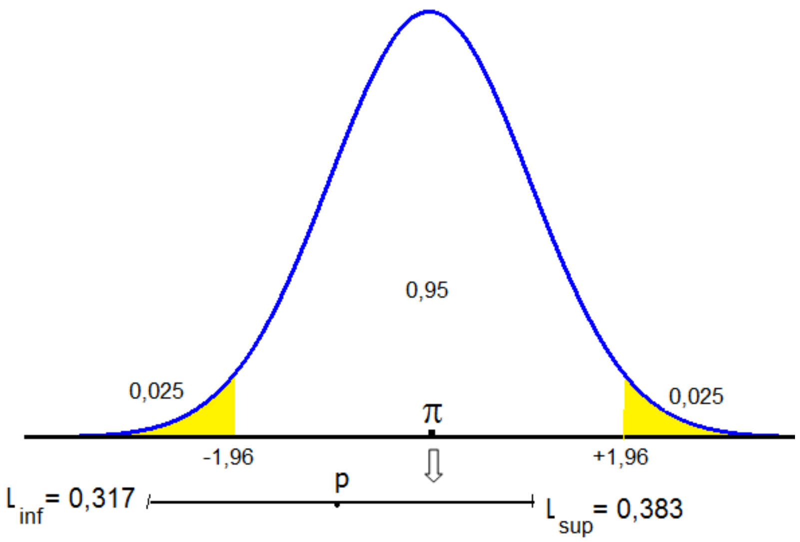


Figura 1.7. Intervalo de confianza de la proporción sobre una distribución normal.

En consecuencia, podemos decir que la proporción poblacional, π, es un valor comprendido entre 0,317 (31,7%) y 0,383 (38,3%) con una probabilidad, o nivel de confianza, del 95% (Figura 1.7).

1.4.1.3. Intervalo de confianza para la varianza

Cuando tratamos la distribución muestral de la varianza vimos que la variable aleatoria $\frac{(n-1)S_{n-1}^2}{\sigma^2}=\frac{nS_n^2}{\sigma^2}$ se distribuía según χ^2 con $n-1$ g.l. La Figura 1.8 es una representación genérica de esta distribución en la que se indica la probabilidad de que un valor de esa variable aleatoria, tomado al azar, se encuentre entre los dos valores que delimitan la zona mas clara, que vale 1- α.

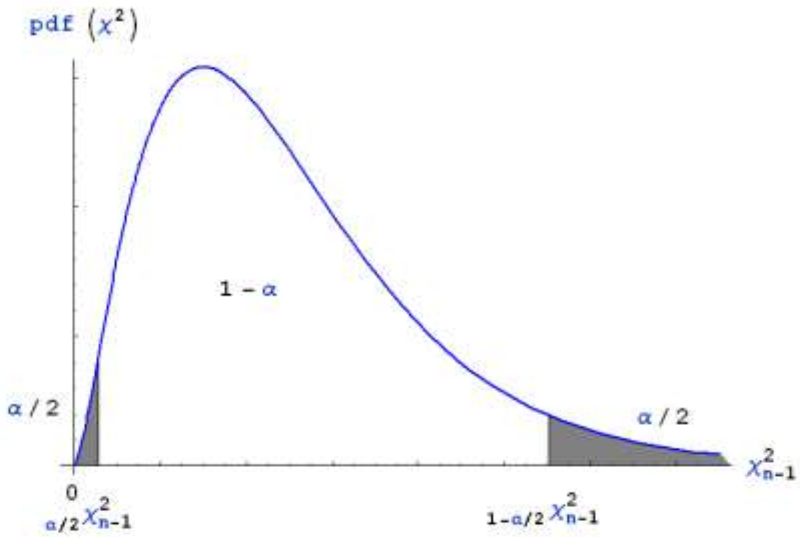


Figura 1.8. Distribución χ^2 con n-1 grados de libertad

Entonces, si fijamos dos valores: $\chi^2_{\alpha/2}$ y $\chi^2_{1-\alpha/2}$ de la distribución de probabilidad de χ^2_{n-1} de tal forma que la probabilidad, p, de que un valor tomado al azar de la variable aleatoria, $\frac{nS_n^2}{\sigma^2}$, , se encuentre en la zona delimitada entre estos dos valores (zona clara de la figura) sea igual a un valor que representamos por $1-\alpha$ y que representa el nivel de confianza. Escrito de otra forma:

$$P\left({}_{\frac{\alpha}{2}}\chi^2_{n-1} \leq \frac{n\cdot S_n^2}{\sigma^2} \leq {}_{1-\frac{\alpha}{2}}\chi^2_{n-1} \right) = 1-\alpha$$

Para obtener el intervalo de confianza de la varianza hay que despejar de la expresión anterior el valor de la varianza poblacional. Veámoslo paso a paso. Primeramente al pasar a los lados de la desigualdad el valor de n.S^2 tendríamos:

$$P\left(\frac{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}\,n-1}}{n\cdot S_n^2}\le\frac{1}{\sigma^2}\le\frac{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}\,n-1}}{n\cdot S_n^2}\right)=1-\alpha$$

y a continuación con el fin de aislar la varianza poblacional, σ^2, tenemos que invertir los miembros de la desigualdad lo que conlleva que varíe el sentido de la misma y tenemos:

$$P\left(\frac{n\cdot S_n^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}\,n-1}}\ge\sigma^2\ge\frac{n\cdot S_n^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}\,n-1}}\right)=1-\alpha$$

y ordenando esta desigualdad de menor a mayor, llegamos a la expresión del intervalo de confianza de la varianza poblacional:

$$P\left(\frac{n\cdot S_n^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}\,n-1}}\le\sigma^2\le\frac{n\cdot S_n^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}\,n-1}}\right)=1-\alpha$$

Es decir que los límites del intervalo de confianza para la varianza poblacional son:

$$l_{\inf}=\frac{n\cdot S_n^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}\,n-1}} \qquad l_{Sup}=\frac{n\cdot S_n^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}\,n-1}}$$

Con las pertinentes modificaciones, se puede usar también la varianza insesgada (cuasi-varianza) siendo en este caso los límites inferior y superior los siguientes:

$$l_{\inf}=\frac{(n-1)\cdot S_{n-1}^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}\,n-1}} \qquad l_{Sup}=\frac{(n-1)\cdot S_{n-1}^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}\,n-1}}$$

Cuando el tamaño de la muestra está por encima de 100 sujetos, la distribución muestral de la varianza se puede aproximar a la normal, y los límites del intervalo de confianza se obtienen, sumando y restando al estimador, el error máximo de estimación (en este caso, S^2 se refiere indistintamente a S_n^2 o S_{n-1}^2):

$$l_{\inf}=S^2-Z_{\alpha/2}\cdot S^2\cdot\sqrt{\frac{2}{n}} \qquad l_{Sup}=S^2+Z_{1-\alpha/2}\cdot S^2\cdot\sqrt{\frac{2}{n}}$$

Ejemplo 1.7: Un grupo de 30 alumnos de enseñanza secundaria seleccionados al azar en una determinada Comunidad realizan un test de comprensión verbal de su lengua autónoma. Las puntuaciones obtenidas se distribuyen normalmente con media 120 y varianza 36. Con una probabilidad de 0'90, ¿entre que valores se encontrará la varianza en comprensión verbal de todos los alumnos de secundaria de esa Comunidad?

Buscamos en la tabla de la distribución chi-cuadrado y con n-1=29 grados de libertad, los dos valores de la variable chi-cuadrado que dejan una probabilidad de 0,90 central. Estos valores son 17,708 y 42,557 tal y como se representan en la Figura 1.9.

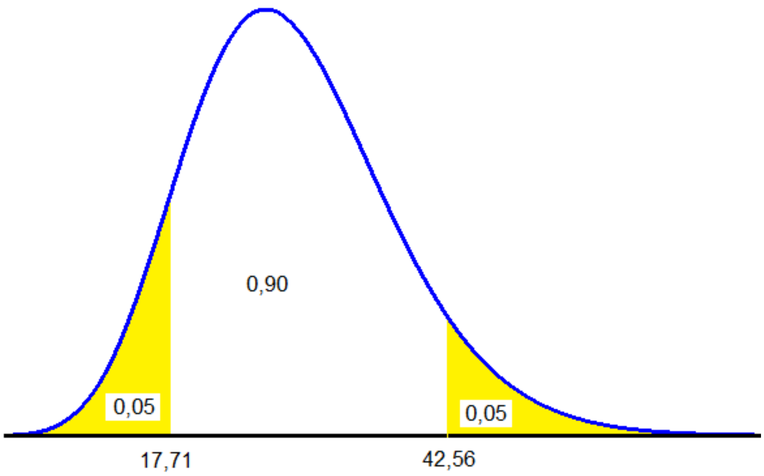


Figura 1.9. Distribución chi-cuadrado con 29 g.l y valores que delimitan una probabilidad de 0,90 central

$$l_{\inf} = \frac{n \cdot S_n^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}\, n-1}} = \frac{30 \cdot 36}{42,56} = 25,37 \qquad l_{Sup} = \frac{n \cdot S_n^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}\, n-1}} = \frac{30 \cdot 36}{17,71} = 60,98$$

Al mismo resultado llegaríamos utilizando la cuasi-varianza de la muestra. En este ejemplo, la varianza es 36 por lo que la cuasi-varianza vale:

$$S_{n-1}^2 = \frac{n \cdot S_n^2}{n-1} = \frac{30 \cdot 36}{29} = 37,24$$

Y los límites son:

$$l_{\inf} = \frac{(n-1) \cdot S_{n-1}^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}\, n-1}} = \frac{29 \cdot 37,24}{42,56} = 25,37 \qquad l_{Sup} = \frac{(n-1) \cdot S_{n-1}^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}\, n-1}} = \frac{29 \cdot 37,24}{17,71} = 60,98$$

1.4.2.- Amplitud del intervalo de confianza y su relación con el tamaño muestral.

La amplitud de un intervalo de confianza depende de dos factores: el nivel de confianza y el error típico de la distribución muestral del estadístico. Este segundo factor está en proporción inversa al tamaño de la muestra, de tal forma que cuanto mayor es el tamaño de la muestra, menor es el error típico del estadístico. Esta relación es fundamental, pues permite dar al intervalo de confianza el grado de precisión que se desee.

Para que el lector vea el proceso, vamos a ejemplificarlo con la media. El error típico de este estimador, cuando se desconoce la varianza poblacional, es $\frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}}$, y para obtener el error máximo de estimación se multiplica por el valor de la distribución *t* de Student (o la Z de la distribución normal, según corresponda) correspondiente al nivel de confianza que se haya estipulado. Es decir, la distancia desde la media muestral a cualquiera de los límites, que vamos a llamar **error máximo de estimación** y lo designamos con E es:

$$E = {}_{\alpha/2}t_{n-1} \frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}},$$

Si despejamos el tamaño de la muestra, n, y lo ponemos en función del resto de elementos el resultado es:

$$n = S^2_{n-1} \frac{\left({}_{\alpha/2}t_{n-1}\right)^2}{E^2}$$

Siguiendo un razonamiento similar, en el Cuadro 1.1 se resume el cálculo del tamaño de la muestra para los tres estadísticos básicos: media, varianza y proporción en función del nivel de confianza y del error máximo de estimación, E, que se quiera fijar.

Cuadro 1.1. Calculo del tamaño de la muestra en función de la precisión de la estimación

Media	Varianza poblacional conocida	$n = \sigma^2 \frac{z^2_{\alpha/2}}{E^2}$
	Varianza poblacional desconocida	$n = S^2_{n-1} \frac{\left({}_{\alpha/2}t_{n-1}\right)^2}{E^2}$
Varianza	Tamaños muestrales grandes	$n = 2\,S^4 \frac{Z^2_{\alpha/2}}{E^2}$
Proporción	Tamaños muestrales grandes	$n = p\cdot(1-p)\cdot\frac{Z^2_{\alpha/2}}{E^2}$

En definitiva, las fórmulas del Cuadro 1.1 permiten al investigador calcular el tamaño de la muestra en función del error máximo, E, que esté dispuesto a admitir y del nivel de confianza $(1-\alpha)$ adoptado.

Veamos la aplicación con un sencillo ejemplo:

Ejemplo 1.8. Se desea calcular el tamaño de la muestra que se requiere utilizar en una encuesta electoral de manera que la precisión en la proporción de voto estimada, o error máximo de estimación, con un nivel de confianza del 95%, sea de ± 0,02.

Situándonos en la situación más desfavorable respecto del error típico de la proporción[5], se tiene que: $p = 1 - p = 0{,}5$. De acuerdo con esto, tendremos:

$$n = 0{,}5 \times 0{,}5 \times \frac{1{,}96^2}{0{,}02^2} = 2401$$

Con este número de sujetos, el investigador se asegura de que la amplitud del intervalo de confianza será 0,04 (cuatro puntos porcentuales) con un nivel de confianza del 95%.

Podemos comprobar, que si el investigador quisiera trabajar con una precisión en la estimación igual a: $E = \pm 0{,}01$, entonces el tamaño de la muestra pasaría a ser de 9604 sujetos.

1.4.3. Contraste de hipótesis.

Una hipótesis estadística es una conjetura que se formula sobre una población y que puede someterse a prueba, o contrastación empírica, a partir de la información proporcionada por una muestra representativa de esa población. Una vez que la hipótesis se ha contrastado con los datos de la muestra es el momento de tomar alguna decisión respecto a su resultado. El contraste de hipótesis es, pues, una parte esencial del método científico.

En general, siempre se parte de algún interrogante que se plantea en el ámbito de una investigación, a la luz de un determinado marco teórico, y debería formularse de una manera sencilla y clara: ¿votan las mujeres en mayor proporción a partidos de centro izquierda que a los de centro derecha?; en el proceso de trabajo manual ¿es más eficaz verbalizar las acciones durante la tarea que hacerlas en silencio?; ¿es más eficaz una terapia A que otra B para el tratamiento de la fobia de los niños a montar en ascensores?; ¿los salarios de hombres y mujeres son iguales por un mismo trabajo?

Una vez planteada la cuestión, hay que buscar una solución que adopte la forma de afirmación empíricamente verificable, es decir, debemos ser capaces de operativizar nuestras preguntas para que tengan entidad de hipótesis científicas. La mejor manera de hacerlo es plantearla en términos estadísticos; esto significa que las afirmaciones que se realicen estén relacionadas de alguna manera con una o más distribuciones de probabilidad. Por ejemplo, el salto entre una hipótesis científica como "¿los salarios de hombres y mujeres son iguales por un mismo trabajo?", se puede sustanciar como hipótesis estadística preguntando: "¿Es igual la media de salario de hombres y mujeres para un mismo trabajo?"; o también se podría preguntar en términos de otro estadístico tal como la Mediana, o en términos de una función de distribución. Es decir, una hipótesis científica se pueden plantear con diferentes hipótesis estadísticas, las cuales, al contrastarse dan respuesta a dicha hipótesis científica.

Las **hipótesis estadísticas** planteadas para dar respuesta a la hipótesis científica son: l**a hipótesis nula** y la **hipótesis alternativa**. La hipótesis nula se representa por H_0, y puede contener afirmaciones como las siguientes:

[5] Si observa la fórmula del error típico de la distribución muestral de la proporción deducirá que alcanzará su valor máximo cuando p=q=0,5

Hipótesis	Hipótesis estadística. Hipótesis Nula
La media de salario de hombres y mujeres para un mismo trabajo son iguales	$H_0 : \mu_{HOMBRES} = \mu_{MUJERES}$
La proporción de mujeres que votan a partidos de centro-izquierda es del 60%.	$H_0 : \pi = 0{,}6$
¿La varianza, respecto a un valor previo establecido, es al menos de 12 puntos?	$H_0 : \sigma^2 \geq 12$
Las puntuaciones de un test de razonamiento numérico tienen distribución normal con media 50 y desviación típica 5.	H_0: la variable Y tiene distribución normal N(50,5).

En general, la hipótesis nula afirma que no existe diferencia entre el valor del estadístico obtenido en la muestra y el que formulamos como parámetro poblacional o, en otras palabras, que la diferencia observada entre estos dos valores es nula. Como la realidad es que estos valores casi nunca van a coincidir, lo que estamos afirmando es que la diferencia observada puede explicarse como resultado del azar. De otra forma, si se repitiese la investigación un número suficiente de veces con diferentes muestras del mismo tipo y tamaño extraídas aleatoriamente de la misma población, las diferencias observadas entre el estadístico calculado con los datos muestrales y el valor formulado en la hipótesis nula como parámetro poblacional, serían unas veces grandes, otras pequeñas, unas positivas, otras negativas, pero en conjunto tenderían a neutralizarse para finalmente ser cero.

Para cada hipótesis nula planteada, es preciso plantear otra, denominada **hipótesis alternativa**, representada por H_1, y que es la negación de la hipótesis nula, de tal forma que si la hipótesis nula es falsa la hipótesis alternativa tiene que ser verdadera o viceversa. Por tanto, estas dos hipótesis tienen que ser exhaustivas y mutuamente excluyentes. Para el conjunto de hipótesis nulas anteriores, las alternativas serían:

Hipótesis científica	Hipótesis estadística. Hipótesis Alternativa
La media de salario de hombres y mujeres para un mismo trabajo NO son iguales	$H_1 : \mu_{HOMBRES} \neq \mu_{MUJERES}$
La proporción de mujeres que votan a partidos de centro-izquierda NO es del 60%.	$H_1 : \pi \neq 0{,}6$
La varianza respecto al valor anterior establecido es menor de 12 puntos?	$H_1 : \sigma^2 < 12$
Las puntuaciones de un test de razonamiento numérico NO tienen distribución normal con media 50 y desviación típica 5.	H_1: la variable Y NO tiene distribución normal N(50,5).

Dependiendo de cómo esté formulada la hipótesis nula se marca la **dirección del contraste**. Si, por ejemplo, la H_0 está planteada como igualdad de las medias de hombres y mujeres, mientras que la alternativa es simplemente su negación (las medias no son iguales) se dice que es un **contraste bilateral** porque H_1 admite que la diferencia pueda ser favorable a los hombres (un extremo de las posibles puntuaciones con respecto a la igualdad) o a las mujeres (el extremo contrario) Si, por el contrario, conocemos la dirección en que H_0 puede ser falsa, como por ejemplo en la hipótesis $H_0 : \sigma^2 \geq 12$, o, en general, cuando en la investigación se plantea que un método de aprendizaje, un fármaco, un determinado proceso industrial, etc. tiene efecto positivo (o negativo) sobre lo que estamos estudiando, entonces tenemos un **contraste**

unilateral en la medida en que indicamos la dirección esperada según H_1 de ese efecto. Igualmente en estos casos, para una hipótesis alternativa "El método A, favorece el aprendizaje", la hipótesis nula, su negación, sería: "El método A no favorece el aprendizaje".

En cualquier caso las hipótesis nula y alternativa son exhaustivas y mutuamente excluyentes, de tal forma que la negación de una conlleva la confirmación de la otra.

Una vez que se ha planteado la hipótesis, es preciso definir lo que se conoce como **medida de la discrepancia** y que, en general, cuando se trata de hacer contrastes sobre parámetros poblacionales, es una medida estandarizada dentro de alguna distribución de probabilidad, a semejanza de las vistas en los epígrafes de distribuciones muestrales. La medida de discrepancia no depende de las unidades en que esté medida la variable y su formulación habitual es:

$$\begin{array}{c}\text{Estadístico de contraste}\\ \text{o}\\ \text{discrepancia}\end{array} = \frac{\begin{array}{l}\text{valor del estadístico}\\ \text{en la muestra}\end{array} - \begin{array}{l}\text{valor del parámetro}\\ \text{planteado en la Ho}\end{array}}{\begin{array}{c}\text{desviación típica de la distribución}\\ \text{muestral del estadístico}\end{array}}$$

Además de definir la discrepancia es preciso considerar qué cantidad de ésta consideramos admisible para no ser atribuible al azar. Es decir, debemos determinar, *a priori*, cuál será la diferencia máxima entre el estimador y el parámetro que estamos dispuestos a considerar compatible con la H_0, y esta decisión dependerá tanto de la distribución de probabilidad de la medida de discrepancia como de la dirección del contraste, como del riesgo que estamos dispuestos a asumir.

Como veremos en próximos apartados, este valor de la discrepancia se establece, también, en términos de probabilidad de obtener una diferencia entre el estadístico obtenido en la muestra y el parámetro formulado en la hipótesis igual o mayor que la observada. Esta probabilidad es la que se conoce como **nivel crítico p**, y en la mayor parte de las investigaciones se rechazará H_0 si este valor es menor de 0,05 o 0,01.

1.4.3.1 Metodología clásica del contraste de hipótesis

La metodología del contraste es fruto de los trabajos de Fisher, Neyman y Pearson y su lógica recuerda a la de un juicio en un estado de derecho, en el cual el acusado siempre es inocente (la hipótesis nula) hasta que las pruebas no demuestren lo contrario (la hipótesis alternativa). En los contrastes de hipótesis las pruebas son las evidencias recogidas en los datos muestrales provenientes de una investigación bien diseñada[6] y se parte de que la hipótesis nula es verdadera (presunción de inocencia). Si los datos aportan resultados significativamente diferentes de los planteados en la hipótesis nula, ésta es rechazada, y en caso contrario, no podremos hacerlo por no tener evidencias contra ella, de modo que la mantendremos como provisionalmente verdadera hasta que se encuentren nuevas evidencias.

Los procedimientos para el cálculo de intervalos de confianza -y buena parte de los contrastes de hipótesis que veremos en los siguientes temas- se basan en una serie de supuestos (v.gr., que la muestra procede de una población de puntuaciones que se distribuyen según una función de distribución poblacional conocida, como la curva normal, o sobre el nivel de medida de la variable, etc). Estos procedimientos y otros que no se han presentado todavía (ANOVA, regresión múltiple, etc.), se engloban en lo que se conoce como

[6] Tratado en la asignatura de Fundamentos de Investigación

"**métodos paramétricos**" cuya denominación procede de la búsqueda de los parámetros subyacentes a unos datos asumiendo que éstos se distribuyen según una función de distribución poblacional concreta. Todos las pruebas paramétricos asumen una determinada forma (normal, binomial, F, etc.) para la distribución poblacional de los datos observados en la muestra. Pero a veces nos encontramos con situaciones en las que no podemos asumir los supuestos subyacentes a las pruebas paramétricas y necesitamos procedimientos cuya validez no dependa de esos supuestos. En este caso se nos hace necesario acudir a otro conjunto de técnicas que no exijan estos supuestos tan restrictivos. Por contraposición a los anteriores métodos, se los conoce como "**métodos no paramétricos**". Los contrastes de hipótesis no paramétricos se utilizan cuando no se cumplen los supuestos necesarios para realizar un contraste paramétrico, por ejemplo, cuando la variable dependiente no alcanza un nivel de medida de intervalo o razón, cuando la muestra es pequeña y no conocemos la forma de la distribución poblacional, etc.

Teniendo en consideración esta primera distinción entre las pruebas paramétricas y no paramétricas que se aplicarán en todo contraste, las etapas de un contraste de hipótesis las vamos a resumir en los siguientes puntos:

1.- Condiciones de la investigación y supuestos que cumplen los datos observados. A lo largo de este curso veremos que al diseñar cualquier investigación se puede trabajar con una, dos, tres o más muestras, las cuales pueden ser independientes o relacionadas, en las que se recoge información sobre una o más variables medidas con la misma o con diferentes escalas de medida (nominal, ordinal, de intervalo o de razón). Por otra parte, estos datos pueden provenir de poblaciones en las que la variable de estudio tiene una distribución de probabilidad conocida o desconocida. Todas estas características tanto del diseño como de los datos condicionan tanto la hipótesis que se puede someter a contrastación empírica como el procedimiento de análisis de datos más adecuado para someter a contrastación empírica la hipótesis.

2.- Formulación de la hipótesis nula y de la alternativa. Conforme al contexto de la investigación se formulan las hipótesis nula y alternativa, de las cuales se deriva un contraste bilateral o unilateral en función de sus objetivos. Por lo general la hipótesis científica, dirigida a encontrar resultados significativos, es la hipótesis alternativa que se aceptará como verdadera si la investigación aporta evidencias contra la hipótesis nula que es la que se somete a contrastación empírica.

3.- Estadístico de contraste. Representa una medida de la discrepancia entre la información proporcionada por los datos empíricos recogidos en la muestra y la proposición teórica planteada en la hipótesis nula. Esta medida es una variable aleatoria con una determinada distribución de probabilidad (normal, t, chi-cuadrado, etc.) que va a aportar información empírica sobre la afirmación formulada en H_0

4.- Regla de decisión. Una vez calculado el estadístico de contraste o discrepancia entre los datos empíricos observados en la muestra y los datos teóricos que planteamos en la hipótesis nula queda tomar una decisión respecto al rechazo o no de la hipótesis nula. Para ello, el investigador establece previamente el **nivel de significación**, α. Según Fisher, el nivel de significación, α, representa el máximo riesgo que el investigador está dispuesto a cometer de tomar la decisión errónea de rechazar una hipótesis nula verdadera. Por tanto, a la luz de sus resultados y del estadístico de contraste, el investigador calcula la probabilidad de obtener unos resultados como los observados en la muestra o más extremos. Esta probabilidad recibe el nombre de **nivel crítico p**. Si el nivel crítico p es muy pequeño en comparación con el nivel de significación, α, rechazamos la H_0 y en caso contrario la mantenemos.

El nivel de significación que suele utilizarse en la mayoría de las investigaciones es del 0.05, aunque en investigaciones más rigurosas se trabaja con un nivel de significación de 0.01. En cualquiera de los casos, se rechazaría la hipótesis nula siempre que la probabilidad de explicar los resultados obtenidos en relación a la hipótesis nula sea menor que el nivel de significación.

Otra alternativa a la hora de tomar la decisión de rechazar o no la hipótesis nula consiste en fijar el nivel de significación α, por lo que automáticamente se fija **el valor o valores críticos** de la distribución muestral que marcarán la máxima diferencia que podemos admitir, por simple azar, entre el valor teórico planteado en H_0 y el valor obtenido en la muestra. Este valor, o valores críticos, definen -en la distribución muestral del estadístico de contraste- los límites entre la zona de rechazo o no de la H_0.

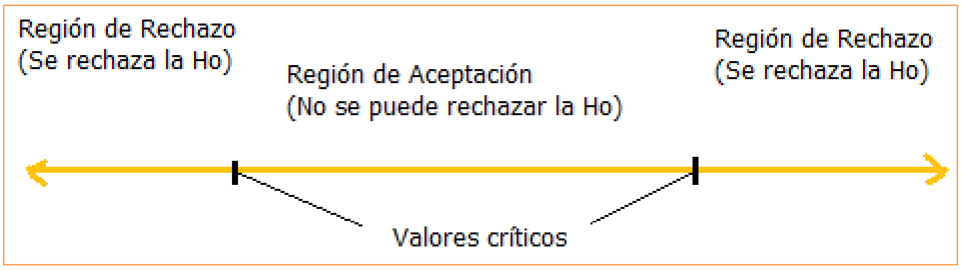
La ***zona de rechazo*** depende del nivel de significación, α, y es el área de la distribución muestral que corresponde a un valor de la discrepancia tan alejado de H_0 que la probabilidad de que se produzca es muy baja, si efectivamente H_0 es verdadera. En otras palabras, es aquella zona de la distribución muestral constituida por el conjunto de muestras para las cuales se rechaza la hipótesis nula H_0.

La ***región de no rechazo***, complementaria a la anterior, depende del nivel de confianza, $1-\alpha$, y es el área de la distribución muestral que corresponde a valores pequeños de la discrepancia tan poco alejados del valor formulado en la H_0 que la probabilidad de que se produzca es alta si efectivamente la H_0 es verdadera, por lo que no representa evidencia suficiente para rechazarla. En otras palabras, es aquella zona de la distribución muestral constituida por el conjunto de muestras para las cuales se mantiene la hipótesis nula H_0.

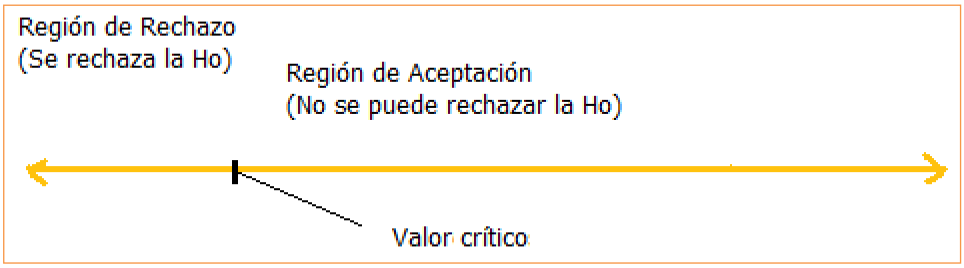
Por tanto, el valor o valores críticos corresponden a la máxima diferencia que cabe esperar por simple azar entre los datos empíricos obtenidos en la muestra y los datos teóricos que formulamos para la población, de tal forma que si el estadístico de contraste se sitúa en la zona de NO rechazo, podemos concluir que la diferencia observada no es significativa y se debe a los errores aleatorios por lo que no podemos rechazar la hipótesis nula con un determinado nivel de confianza.

De forma similar si el estadístico de contraste alcanza la zona de rechazo indicaría que la diferencia observada entre los datos empíricos y los datos teóricos es muy poco probable que pueda atribuirse a errores aleatorios y concluimos que la diferencia observada es significativa, lo que nos lleva a rechazar la hipótesis nula con un determinado nivel de confianza.

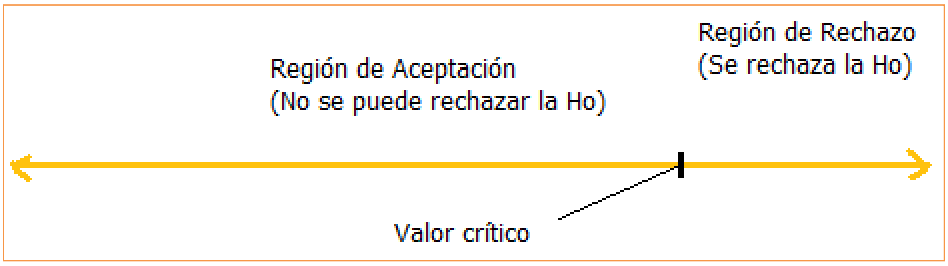
Aunque existen contrastes de hipótesis, que veremos posteriormente, en los que siempre se deja todo el nivel de significación en una parte de la distribución, en general y con independencia de la forma de la función de distribución del estadístico de contraste, si el contraste es bilateral tendremos tres zonas delimitadas por los dos valores críticos que se sitúan en el eje horizontal de la distribución muestral como las esquematizadas en el siguiente gráfico:



Si el contraste es unilateral izquierdo solo tendremos dos zonas, siendo la región de rechazo la situada en la parte izquierda de la distribución, como se representa en el siguiente gráfico esquemático:



De forma similar, si el contraste es unilateral derecho, la región de rechazo se situará en la parte derecha de la distribución muestral como se representa en el siguiente gráfico esquemático:



En cualquier caso, ya sea comparando el estadístico de contraste con el valor crítico o comparando el nivel crítico p con el nivel de significación α , la decisión que se toma respecto a la H_0 es la misma. Puesto que no hay verdades absolutas y siempre existe un riesgo de error, formalmente la hipótesis nula NUNCA se acepta, sino que la estrategia de la investigación es buscar evidencias para rechazarla.

5.- Conclusión. Formulada la hipótesis nula, que es la que sometemos a contrastación empírica asumiendo que es provisionalmente verdadera y una vez calculado el estadístico de contraste, se concluye rechazando o no la hipótesis nula (no hay un punto intermedio[7]). Si no tenemos evidencia suficiente para rechazarla, se está señalando que la hipótesis se mantiene porque es compatible con la evidencia muestral (el acusado en el juicio es inocente), y si se rechaza se quiere significar que la evidencia muestral no avala la hipótesis (las pruebas están en contra del acusado) y por tanto se rechaza.

6.- Interpretación. La conclusión simple y llana en términos de rechazo o no de la hipótesis nula tiene su correspondiente interpretación dentro del contexto de la investigación y de la hipótesis y objetivos que el investigador formula en su trabajo.

Ilustremos este razonamiento con un sencillo ejemplo, similar al que plantea R.A. Fisher en su libro *El Diseño de Experimentos*, en el cual refería la afirmación de una dama según la cual, cuando tomaba el té, podía detectar si se había vertido antes la leche o la infusión en la taza. Para refutar esta "facultad" de la dama podríamos realizar un contraste con los siguientes datos ficticios.

Ejemplo 1.9. Para contrastar la presunta "habilidad detectora" de la dama se preparan 16 tazas de té, siguiendo ambos procedimientos: en ocho se vierte primero la leche, y en otros ocho se vierte primero la infusión. La presentación se realiza al azar y la dama sólo tiene que decir cuál ha sido el procedimiento. Supongamos, por ejemplo, que la dama acierta en 12 ocasiones. ¿Es compatible este resultado muestral con la afirmación de la dama?. Como nivel de significación, tomaremos α = 0,05.

[7] Cuando la medida de discrepancia cae justo en la región crítica de la zona de aceptación o rechazo, es difícil tomar una decisión sobre H_0. En estas circunstancias se suele coger nueva evidencia y proceder a un nuevo contraste.

Seguiremos los 6 pasos del proceso pero utilizando sólo el nivel crítico p como regla de decisión, dejando el cálculo del estadístico de contraste para los siguientes temas.

1.- Condiciones y supuestos. 16 ensayos independientes con dos resultados posibles en cada uno: acierto o error, y la probabilidad del resultado permanece constante en todos ensayos.

2.- Formulación de las hipótesis nula y alternativa: Planteamos un contraste unilateral en el que la hipótesis nula presupone que la dama, en principio, no tiene dicha habilidad, y por tanto la proporción de veces que acertaría sería un valor igual a 0,5 o inferior (es decir, tendría la misma habilidad que el resto de lo mortales). La hipótesis alternativa plantea que la dama si tiene esa habilidad y por tanto es capaz de acertar en más del 50% de los ensayos.

$$H_0 : \pi \leq 0{,}5 \qquad H_1 : \pi > 0{,}5$$

3.- Estadístico de contraste. Como estamos contrastando una proporción cuya distribución de probabilidad es la distribución binomial que estudiamos el curso pasado, vamos a calcular la probabilidad de que, bajo el supuesto de que la dama no tiene esa extraña facultad (y por tanto su proporción de aciertos es la de cualquier persona normal del 50% que se formula en la H_0) la dama haya sido capaz de detectar la diferencia en más de la mitad de la veces, concretamente en 12 o más ocasiones de los 16 ensayos realizados (formulado en la H_1):

$$P(X \geq 12) = \sum_{x=12}^{16} \binom{16}{x} \cdot 0{,}5^x \cdot 0{,}5^{n-x} = 1 - P(X < 12) = 1 - \sum_{x=0}^{11} \binom{16}{x} \cdot 0{,}5^x \cdot 0{,}5^{n-x} = 1 - 0{,}9616 = 0{,}0384$$

x	p
1	0,0002
2	0,0018
3	0,0085
4	0,0278
5	0,0667
6	0,1222
7	0,1746
8	0,1964
9	0,1746
10	0,1222
11	0,0667
12	**0,0278**
13	**0,0085**
14	**0,0018**
15	**0,0002**
16	**0,0000**

Cuadro 1.2. Tabla de la distribución binomial para N=16 y p=0,5

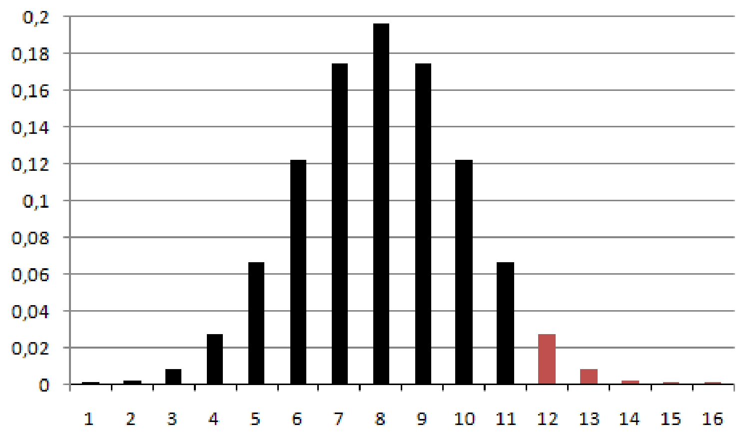


Figura 1.10. Representación gráfica del ejemplo 1.6

4.- Regla de decisión. Este resultado quiere decir que, bajo el supuesto de que la hipótesis nula es cierta y la probabilidad de acierto de la dama es de 0,5, la probabilidad de que en 16 ensayos la dama acierte en 12 ocasiones o más es de 0,0384, o que hay un 3,84% de probabilidades de que la dama, sin tener esa extraña habilidad, acierte por puro azar en 12 ocasiones o más. Como regla de decisión para rechazar o no la hipótesis nula comparamos esta probabilidad con el nivel de significación (0,05) y puesto que la probabilidad encontrada es menor que 0,05, rechazamos la H_0,

En la Figura 1.10 se representa la distribución binomial del cuadro 1.2 del ejemplo con el nivel crítico p representado por valores escritos y representados por barras rojas cuya suma es menor de 0,05. Por tanto, la regla de decisión bajo la interpretación de Fisher consiste en calcular la probabilidad de obtener unos resultados como los observados en la muestra (nivel crítico p). Si esta probabilidad es muy pequeña en comparación con α, pueden ocurrir dos cosas: o bien la hipótesis nula es cierta (la dama no goza de tal habilidad) y se ha producido una situación muy poco probable (pero no imposible) o bien la hipótesis nula es falsa. Parece más lógico (o probable) inclinarse por esta segunda opción que descarta el azar como explicación del resultado obtenido y ante la evidencia que proporciona este resultado, el investigador opta por rechazar la hipótesis nula, asumiendo que esta afirmación tiene un cierto riesgo o probabilidad de error, que ha establecido en el 5%. Si, por el contrario, la probabilidad hubiese sido mayor que el nivel de significación, entonces no se podría descartar el azar, como explicación de la diferencia y se opta por no rechazar la hipótesis nula.

5.- Conclusión: Rechazamos la hipótesis nula, ya que el nivel crítico p es menor que 0,05. El nivel crítico p= 0,0384, nos indica la probabilidad de acertar por simple azar en 12 o más de las 16 ocasiones. Es un valor lo suficientemente pequeño que nos conduce a descartar el azar como explicación de este número de aciertos tan alto. En consecuencia, si descartamos el azar como explicación de que la dama acierte en 12 o más de los 16 ensayos es porque la dama si tiene realmente esa capacidad.

6.- Interpretación: Rechazar la hipótesis nula quiere decir que la dama tiene esa habilidad para distinguir si en una taza de té se ha puesto primero la leche o la infusión con un nivel de confianza del 95%.

Observe el lector que si se establece el nivel de significación en 0,01 la conclusión sería otra y sería necesario obtener evidencias más fuertes o una probabilidad mucho menor para descartar el azar como explicación de esta extraña habilidad de la señora.

En los siguientes temas seguiremos esta metodología pero utilizando, no solo el nivel crítico p, sino también y fundamentalmente el estadístico de contraste como medida de la discrepancia entre los valores teóricos que formulamos en la población y la información empírica que nos proporcionan los datos recogidos en la muestra, para los diseños de investigación que utilizan una, dos o más muestras. Y partir de estos estadísticos de contraste podremos calcular también el nivel crítico p.

1.4.3.2.- Errores al tomar una decisión en un contraste clásico de hipótesis

Hemos visto que el contraste de hipótesis es un proceso por el cual se toma una decisión acerca de lo que se afirma en la hipótesis nula. No obstante, una cosa es la decisión que se adopta sobre H_0 y otra es la propia naturaleza de H_0. Tenemos dos opciones posibles acerca de la decisión sobre H_0: o se Acepta o se Rechaza, y dos opciones sobre la naturaleza de H_0: o es verdadera o es falsa.

El error que supone rechazar una hipótesis nula cuando en realidad es verdadera se denomina **Error Tipo I**, y su probabilidad asociada es α. El error que supone aceptar una hipótesis nula cuando en realidad es falsa, siendo verdadera la hipótesis alternativa, se conoce como **Error Tipo II**, y su probabilidad asociada es β Su complementario es $1-\beta$ y corresponde a la **potencia del contraste** que es la decisión correcta de rechazar la hipótesis nula cuando es falsa.

Puede observarse que los errores y las decisiones correctas están probabilísticamente relacionados (cuanto menor es α mayor es $1-\alpha$, por ejemplo). Estas ideas pueden verse reflejadas en el siguiente cuadro o tabla de doble entrada con dos alternativas en cada entrada como puede verse en el cuadro 1.3.

		Naturaleza de H_0	
		Verdadera	**Falsa**
Decisión sobre H_0	No rechazar	Decisión correcta. **Nivel de confianza** $1-\alpha$	Decisión errónea **Error tipo II** β
	Rechazar	Decisión errónea **Error tipo I** α	Decisión correcta **Potencia del contraste** $1-\beta$

Cuadro 1.3. Decisiones sobre la hipótesis nula

En todo contraste de hipótesis el investigador fija *a priori* el nivel de significación (error tipo I) y su complementario, el nivel de confianza, o decisión correcta de no rechazar una hipótesis nula que puede ser verdadera. En el tema siguiente veremos cómo se calcula el error tipo II y la potencia del contraste (pero exclusivamente para el contraste sobre la media y la proporción en los diseños de una muestra) y veremos también cómo este valor depende del nivel de significación, del tamaño de la muestra, n, y del tamaño del efecto.

¿Cuál de estos errores es más grave? Vamos a ilustrarlo con dos ejemplos. Suponga que comparamos un tratamiento nuevo, A, con otro antiguo, B, ya existente. La hipótesis nula dirá que los dos tratamientos son, al menos, igual de eficaces frente a la hipótesis alternativa según la cual el tratamiento A es mejor que el B:

$$H_0: A \leq B \qquad H_1: A > B$$

Imagine que rechazamos la hipótesis nula cuando en realidad es cierta, es decir, que concluimos que el tratamiento nuevo, A, es más eficaz cuando en realidad son iguales. En esta situación estaríamos cometiendo el error tipo I con una probabilidad α.

Si por el contrario, y como resultado del contraste de hipótesis, concluimos que los dos tratamientos son iguales (es decir, no rechazamos la hipótesis nula que es falsa) cuando en realidad el nuevo tratamiento es mejor que el anterior, estaríamos cometiendo un error tipo II con una probabilidad β. Es evidente que el error tipo II resulta más grave por cuanto impide beneficiarse de un tratamiento que es más eficaz. Mientras que el error tipo I, (sin entrar a considerar las consecuencias económicas de la decisión de cambiar a algo que es igual de eficaz) tiene consecuencias menos grave, al menos en el campo del progreso del conocimiento.

La realidad de la H_0

Decisión sobre H_0		Verdadera	Falsa
	No rechazar	**Correcto** El tratamiento no tiene efecto y así se decide. Probabilidad $1-\alpha$	**Error de tipo II** El tratamiento si tiene efecto pero no lo percibimos. Probabilidad **β**
	Rechazar	**Error de tipo I** El tratamiento no tiene efecto pero se decide que sí. Probabilidad **α**	**Correcto** El tratamiento tiene efecto y el experimento lo confirma. Probabilidad $1-\beta$

Esta valoración puede cambiar dependiendo del contexto en el que nos situemos. Por ejemplo, aplicando el mismo razonamiento sobre la inocencia o culpabilidad de un imputado, las hipótesis nula y alternativa son: $H_0: Inocente \quad H_1: Culpable$

Partimos del supuesto de que la hipótesis nula es verdadera (el imputado es inocente) mientras no se tenga evidencia suficiente para condenarle (rechazar la H_0 y aceptar la H_1). En este contexto se introducen otras razones de índole moral para valorar qué es más grave: si tener un inocente en la cárcel o un culpable en la calle.

La realidad de la H_0

Decisión sobre H_0		Inocente	Culpable
	No rechazar Ho Inocente	**Correcto** Es inocente. Probabilidad $1-\alpha$	**Error de tipo II** Es culpable y no se le condena. Probabilidad **β**
	Rechazar Ho Culpable	**Error de tipo I** Es inocente y se le condena. Probabilidad **α**	**Correcto** Es culpable. Probabilidad $1-\beta$

En cualquier caso, el hecho de no rechazar la H_0 puede deberse o bien a que sea realmente verdadera o sea falsa pero el experimento no tenía suficiente potencia para detectarlo. Debido a esto, aunque el análisis de los datos de nuestro diseño de investigación no produzca resultados significativos, nunca podremos aceptar la H_0 como verdadera. Como siempre, existe la posibilidad de que la H_0 sea falsa, pero el diseño de nuestra investigación no tiene la suficiente sensibilidad para detectarlo, tan solo podremos concluir que nuestros resultados no han aportado evidencia suficiente para rechazar la hipótesis nula. El análisis de la potencia del contraste nos proporciona información sobre el grado de confianza en los resultados no significativos que no ha permitido rechazar la hipótesis nula formulada en el diseño de nuestra investigación.

Por otra parte, y como veremos en temas posteriores, tanto en la investigación aplicada en el ámbito de la psicología, como en otras ciencias, un resultado estadísticamente *significativo* sobre la eficacia de un nuevo tratamiento puede no tener una *significación práctica* en el sentido de no representar un valor terapéutico real o importante. De aquí la recomendación, casi ineludible, de conocer adicionalmente el **tamaño del efecto** que expresa la magnitud de la diferencia observada entre la hipótesis nula (el valor teórico) y la hipótesis alternativa (el valor observado) expresado en una métrica común y que, por su importancia metodológica de cara la validez de conclusión estadística de la investigación que hemos diseñado, expondremos con algo más de detalle en temas posteriores.

1.5. EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN.

1. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones referidas a la distribución muestral de la media es FALSA: a) Es normal cuando la población se distribuye normalmente y conocemos su varianza; b) Tiende a la normal cuando desconocemos la varianza poblacional pero trabajamos con muestras grandes; c) Siempre es normal con media igual a la media poblacional.
2. El nivel crítico p representa la probabilidad de: a) que la hipótesis nula sea verdadera; b) que siendo verdadera la hipótesis nula obtengamos unos datos como los observados o más extremos en la muestra; c) rechazar la hipótesis nula siendo verdadera.
3. A una muestra de 122 estudiantes universitarios, de los cuales 74 son mujeres se les pasa una prueba de memoria de palabras sin sentido, obteniendo una media de 15 palabras recordadas, con una varianza de 9. Trabajando con un nivel de confianza del 95%, ¿entre que valores se encontrará la media poblacional?
4. A una muestra de 122 estudiantes universitarios, de los cuales 74 son mujeres se les pasa una prueba de memoria de palabras sin sentido, obteniendo una media de 15 palabras recordadas, con una varianza de 9. Entre que valores se encontrará la varianza poblacional con un nivel de confianza del 95%?
5. A una muestra de 122 estudiantes universitarios, de los cuales 74 son mujeres se les pasa una prueba de memoria de palabras sin sentido, obteniendo una media de 15 palabras recordadas, con una varianza de 9. Si queremos estimar la varianza poblacional con un error máximo de estimación que no supere los dos puntos, ¿Cuál debería ser el tamaño de la muestra que debemos utilizar fijando el nivel de confianza en el 95%?.
6. A una muestra de 122 estudiantes universitarios, de los cuales 74 son mujeres se les pasa una prueba de memoria de palabras sin sentido, obteniendo una media de 15 palabras recordadas, con una varianza de 9. Trabajando con un nivel de confianza del 95%, ¿entre que valores se encontrará la proporción poblacional de mujeres universitarias?.
7. En un contraste de hipótesis es habitual que el investigador fije a priori el valor de α que representa la probabilidad de: a) conservar la hipótesis nula cuando no se encuentra en los datos de la muestra suficiente evidencia para rechazarla; b) rechazar la hipótesis nula siendo cierta; c) aceptar la hipótesis alternativa siendo cierta.
8. La probabilidad de rechazar la hipótesis nula siendo falsa, es: a) un valor conocido y fijado a priori por el investigador; b) un valor desconocido que representa el error tipo II; c) la potencia del contraste que es un valor desconocido a priori.
9. La amplitud del intervalo es más estrecho a medida que; a) aumenta el tamaño de la muestra; b) aumenta el nivel de confianza; c) aumenta el error típico del estadístico.
10. Se llama error típico de un estadístico a la desviación típica de: a) El parámetro poblacional; b) La distribución muestral de este estadístico; c) Los datos recogidos en la muestra.
11. En una muestra aleatoria de 100 personas se mide el pulso obteniendo una media de 65 ppm con desviación típica 5 ppm. ¿Cuánto vale el error máximo de estimación de la media poblacional con un nivel de confianza del 95%?:a) 0.5025;b) 0,997; c) 25.25

SOLUCIONES:

1.- De las tres afirmaciones la c) es FALSA. La distribución muestral de la media es normal cuando la distribución en la población es normal o bien la muestra es superior a 30 observaciones y además conocemos la varianza poblacional. Si la varianza poblacional es desconocida entonces la distribución muestral de la media es la t de Student, que tiende a la normal cuando la muestra es grande.

2.- El nivel p-crítico es la probabilidad asociada al estadístico de la muestra e indica la probabilidad de que, siendo cierta la hipótesis nula, encontrar valores tan extremos como los obtenidos en la muestra.

3.- En este caso, dado que desconocemos la varianza poblacional, la distribución muestral de la media se distribuye según t de Student, con n-1 grados de libertad, pero dado que la muestra es grande ($n > 100$) utilizamos valores Z de la curva normal tipificada, que para un nivel de confianza del 95% son: ±1,96. Por lo tanto, los límites inferior y superior del intervalo son:

$$L_{inf} = \bar{Y} - t_{\propto/2}.\frac{S}{\sqrt{n-1}} = 15 - 1{,}96.\frac{3}{\sqrt{122-1}} = 15 - 0{,}534 = 14{,}466$$

$$L_{sup} = \bar{Y} + t_{1-\propto/2}.\frac{S^2}{\sqrt{n-1}} = 15 + 1{,}96.\frac{3}{\sqrt{122-1}} = 15 + 0{,}534 = 15{,}534$$

4.- Al tratarse de una muestra grande, la distribución muestral de la varianza se aproxima a la normal y los límites inferior y superior del intervalo de confianza para la varianza poblacional, son:

$$L_{inf} = S^2 - Z_{\alpha/2}.S^2\sqrt{\frac{2}{n}} = 9 - 1{,}96.\ 9\sqrt{\frac{2}{122}} = 9 - 2{,}258 = 6{,}742$$

$$L_{inf} = S^2 + Z_{\alpha/2}.S^2\sqrt{\frac{2}{n}} = 9 + 1{,}96.9\sqrt{\frac{2}{122}} = 9 + 2{,}258 = 11{,}258$$

Obsérvese que en este caso el error máximo de estimación que cometemos al estimar la varianza poblacional es de ±2,258 puntos. De ahí que si queremos mejorar la precisión de nuestra estimación, uno de los procedimientos puede ser aumentar el tamaño de la muestra, como veremos en el siguiente ejemplo.

5.-El tamaño de la muestra para un error máximo de estimación de ±2 puntos, es

$$n = 2 \cdot S^4 \cdot \frac{Z^2_{\alpha/2}}{E^2}$$

Conocemos la varianza de la muestra que en este ejemplo es 9, es decir; $S^2 = 9$ por tanto, $S^4 = (S^2)^2 = 9^2 = 81$:

$$n = 2 \cdot S^4 \cdot \frac{Z^2_{\alpha/2}}{E^2} = 2 \cdot 81 \cdot \frac{1{,}96^2}{2^2} = 155{,}6$$

Un valor muy similar si utilizamos la cuasivarianza de la muestra:

$$S^2_{n.-1} = \frac{n}{n-1} \cdot S^2_n = \frac{122}{121} \cdot 9 = 9{,}07 \quad \rightarrow \quad S_{n-1} = 3{,}012$$

$$n = 2 \cdot S^4 \cdot \frac{Z^2_{\alpha/2}}{E^2} = 2 \cdot 3{,}012^4 \cdot \frac{1{,}96^2}{2^2} = 158{,}08$$

6.- El género es una variable dicotómica con distribución binomial siendo la proporción de mujeres obtenida en la muestra: p=74/122= 0,6065. Al tratarse de una muestra grande, esta distribución se aproxima a la normal y los límites del intervalo de confianza para π, son:

$$L_{inf} = p - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p.(1-p)}{n}} = 0{,}6065 - 1{,}96.\sqrt{\frac{0{,}6065.0{,}3935}{122}} = 0{,}5198$$

$$L_{sup} = p + Z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{p.(1-p)}{n}} = 0{,}6065 + 1{,}96.\sqrt{\frac{0{,}6065.0{,}3935}{122}} = 0{,}6932$$

7.- El nivel de significación se representa por α y es un valor fijado a priori por el investigador como criterio de decisión. Los valores habituales son 0,05 y 0,01 y representan la probabilidad que desde un inicio asume el investigador de cometer el error tipo I, es decir, de rechazar una hipótesis nula que es verdadera. Su complementario $1-\alpha$, es el nivel de confianza o probabilidad de tomar la decisión correcta de no rechazar una hipótesis nula cuando no hay evidencia suficiente para hacerlo.

8.- La probabilidad de rechazar una hipótesis nula que es falsa es la potencia del contraste, cuyo valor es desconocido a priori pero se puede calcular, ya que depende del nivel de significación, α, del tamaño de la muestra y la magnitud del efecto.

9.- La amplitud del intervalo de confianza depende del tamaño de la muestra y del nivel de confianza, de forma que al aumentar el nivel de confianza el intervalo es más amplio y al aumentar el tamaño de la muestra disminuye el error típico del estadístico y con ello el intervalo de confianza, como puede deducirse al ver sus expresiones de cálculo.

10.- La opción A es incorrecta por varias razones: se refiere a la distribución poblacional, no a la distribución muestral; puede ser cualquier parámetro, no solo la desviación típica. La opción B es correcta. La opción C es incorrecta porque el error típico se refiere a la variabilidad de la distribución muestral del estadístico mientas que la desviación típica se refiere a la variabilidad de los valores recogidos en la muestra.

11.- Desconocemos la varianza (o la desviación típica) de la población y la forma de la distribución poblacional, por lo que nos apoyaremos en la distribución t con n-1 gl como distribución muestral. El valor de α es 0.05. Nos piden el Error Máximo de estimación. De forma general, el intervalo de confianza de la media se obtiene sumando y restando a la media de la muestra (estimación puntual del parámetro) el error máximo de estimación que corresponde a t veces el error típico de la media (o Z si se tratase de una población con distribución normal y varianza conocida) :

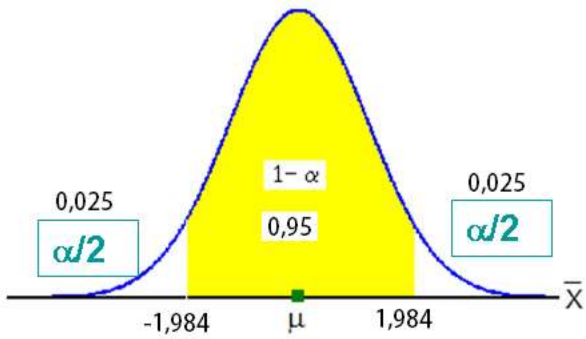
Estimador puntual ± [(Z o t) * (Error típico)]

Luego el valor que nos están pidiendo es el valor que está entre corchetes y que representa el error máximo de estimación:

Si no conocemos la varianza poblacional, la distribución muestral de la media es la distribución t de Student con n-1 grados de libertad y la varianza poblacional hay que estimarla a partir de la varianza o cuasi-varianza de la muestra. Por otro lado, los valores críticos de la distribución t con n-1=100-1=99 grados de libertad son $|t_{0.025}| = |t_{0.975}| = 1.984$

Hemos buscando con 100 grados de libertad (el más cercano a 99, ya que este no existe en la tabla y hemos elegido una probabilidad de 0.975 que es la suma de $\alpha/2 = 0{,}025$ y el Nivel de Confianza = 0.95 (0.025 + 0.950 = 0.975).

g.l.	0,550	0,600	0,650	0,700	0,750	0,800	0,850	0,900	0,950	0,975	0,990	0,995
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	[illegible]	31,821	63,657
27	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	[illegible]	2,467	2,763
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	[illegible]	2,462	2,756
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	[illegible]	2,457	2,750
40	0,126	0,255	0,388	0,529	0,681	0,851	1,050	1,303	1,684	[illegible]	2,423	2,704
50	0,126	0,255	0,388	0,528	0,679	0,849	1,047	1,299	1,676	[illegible]	2,403	2,678
60	0,126	0,254	0,387	0,527	0,679	0,848	1,045	1,296	1,671	[illegible]	2,390	2,660
70	0,126	0,254	0,387	0,527	0,678	0,847	1,044	1,294	1,667	[illegible]	2,381	2,648
80	0,126	0,254	0,387	0,526	0,678	0,846	1,043	1,292	1,664	[illegible]	2,374	2,639
90	0,126	0,254	0,387	0,526	0,677	0,846	1,042	1,291	1,662	1,987	2,368	2,632
100	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1,984	2,364	2,626



El error típico de la media, es: $\sigma_{\bar{Y}} = \dfrac{S_{n-1}}{\sqrt{n}} = \dfrac{S_n}{\sqrt{n-1}}$

Si utilizamos la cuasi-desviación típica de la muestra, primero debemos calcularla:

$$S_{n-1}^2 = \frac{S_n^2 \cdot n}{n-1} = \frac{5^2 \cdot 100}{99} = 25.2525 \qquad S_{n-1} = \sqrt{25.2525} = 5.02519$$

Luego:

$$\sigma_{\bar{Y}} = \frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}} = \frac{5.02519}{\sqrt{100}} = 0.502519$$

Y si utilizamos la desviación típica de la muestra:

$$\sigma_{\bar{Y}} = \frac{S_n}{\sqrt{n-1}} = \frac{5}{\sqrt{100-1}} = 0.502519$$

Obteniendo el mismo resultado con las dos expresiones del error típico de la media. Y el error máximo solicitado es:

$$E_{\max} = 1.984 \cdot 0.502519 = 0.9969 \approx 1$$