Tema 6

DISTRIBUCIONES DISCRETAS DE PROBABILIDAD

Variable aleatoria: definición y tipos:

Una variable aleatoria es una función que asigna un número real, y sólo uno, a cada uno de los resultados de un experimento aleatorio. Las variables aleatorias se representan por letras mayúsculas de nuestro alfabeto latino y utilizaremos las minúsculas con subíndices, para los valores concretos de las variables.
Las variables aleatorias pueden ser discretas o continuas. Discreta cuando la variable sólo puede tomar un conjunto infinito y numerable de valores (los números naturales) o finito de valores (número de sucesos). Y continua cuando puede tomar infinitos valores o un conjunto de valores no numerable.

Variables aleatorias discretas:

Función de probabilidad:

Se llama función de probabilidad de una variable aleatoria discreta, X, y se representa por f(x), a aquella función que asocia a cada valor de la variable la probabilidad de que ésta adopte ese valor. Es decir:

$$f(x) = P\,(X=x)$$

Ejemplo:

E	x	P
⊕ ⊕ ⊕	$x_1 = 0$	1/8 = 0,125
⊕ ⊕ ☺ ⊕ ☺ ⊕ ☺ ⊕ ⊕	$x_2 = 1$	3/8 = 0,375
⊕ ☺ ☺ ☺ ⊕ ☺ ☺ ☺ ⊕	$x_3 = 2$	3/8 = 0,375
☺ ☺ ☺	$x_4 = 3$	1/8 = 0,125

Donde:

x	0	1	2	3
$f(x)$	0,125	0,375	0,375	0,125

La función de probabilidad de una variable aleatoria discreta puede representarse mediante un diagrama de barras.
Las dos propiedades que debe cumplir la función de probabilidad son:

1. Para cualquier valor de x, siempre toma valores positivos o nulos:

$$\forall x \in X \; f(x) \geq 0$$

2. La suma de todas las probabilidades correspondientes a cada valor de x es igual a uno:

$$\sum f(x) = f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n) = 1$$

Función de distribución:

La función de distribución de una variable aleatoria X, se representa igual que la de probabilidad pero en mayúscula: *F(x); y es aquella función que asocia a cada valor de la variable la probabilidad de que ésta adopte ese valor o cualquier otro inferior.*

$$F(x) = P\,(X \leq x)$$

De la misma forma:

$$F(x) = P\,(X \leq x) = f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x)$$

Retomando el ejemplo anterior calculamos *F(0), F(1), F(2) y F(3):*

$$\boldsymbol{F(0) = P(X \leq 0) = P(X = 0) = 0{,}125}$$

$$\boldsymbol{F(1) = P\,(X \leq 1) = P\,(X = 0) + P\,(X = 1) = f(0) + f(1) = 0{,}125 + 0{,}375 = 0{,}5}$$

$$\boldsymbol{F(2) = P\,(X \leq 2) = P\,(X = 0) + P\,(X = 1) + P\,(X = 2) = f(0) + f(1) + f(2) =}$$
$$\boldsymbol{= 0{,}125 + 0{,}375 + 0{,}375 = 0{,}875}$$

$$\boldsymbol{F(3) = P\,(X \leq 3) = P\,(X = 0) + P\,(X = 1) + P\,(X = 2) + P\,(X = 3) =}$$
$$\boldsymbol{f(0) + f(1) + f(2) + f(3)= 0{,}125 + 0{,}375 + 0{,}375 +0{,}125 = 1}$$

Las Propiedades que debe cumplir son:

1. Todos los valores que toma la función de distribución de probabilidad son positivos o nulos:

$$\forall x \quad F(x) \geq 0$$

2. *F(x)* es nula, vale 0, para todo valor inferior al menor valor de la variable aleatoria, x_1:

$$F(x) = 0 \text{ si } x < x_1$$

3. *F(x)* es igual a uno para todo valor igual o superior al mayor valor de la variable aleatoria, llamando a éste "x_k":

$$F(x) = 1 \text{ si } x \geq x_k$$

4. La función F(x) es no decreciente ya que es una acumulación o suma de probabilidades que son siempre positivas o nulas.

5. La probabilidad, P, de que la variable aleatoria X tome valores x comprendidos entre x_1 y x_2 ($x_1 \leq x \leq x_2$) es la diferencia entre los valores de la función de distribución correspondientes a su valor superior menos su valor inferior.

$$P\ (x_1 < x < x_2) = F(x_2) – F(x_1)$$

Media y varianza de una variable aleatoria:

La media, μ, de una variable aleatoria discreta X viene definida por la siguiente expresión:

$$\mu = \sum x.f(x)$$

La media de una variable X, también se le conoce por esperanza matemática o valor esperado de X y se representa por E(X).

Ejemplo:

x	*f(x)*	*x.f(x)*
0	*0,125*	*0,000*
1	*0,375*	*0,375*
2	*0,375*	*0,750*
3	*0,125*	*0,375*
		1,5

$$\boldsymbol{\mu = E(X) = \sum x.f(x) = x_0.f(x_0) + x_1.f(x_1) + x_2.f(x_2) + x_3.f(x_3) =}$$
$$\boldsymbol{= 0.0,125 + 1.0,375 + 2.0,750 + 3.0,375 = 1,5}$$

La varianza σ^2 de una variable aleatoria discreta X viene definida por:

$$\sigma^2 = \sum (x – \mu)^2.\ f(x)$$

Otra alternativa; a veces muy útil, es:

$$\sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

donde: $\boldsymbol{E(X^2) = \sum x^2.f(x)}$ *y* $\boldsymbol{[E(X)]^2}$ es la media elevada al cuadrado.

De la misma forma la desviación típica será la raíz cuadrada de la varianza:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Distribuciones discreta de probabilidad:

Para algunas distribuciones discretas se emplean una serie de tablas que facilitan su aplicación a unos problemas en concreto.
En Ciencias Sociales y de la Salud se trabajan con variables que toman sólo dos valores (dicotómicas 1 – 0); En este caso se utiliza la ***distribución binomial***.

La distribución binomial:

El ensayo anterior de la moneda al aire se denomina Bernouilli, autor de éste. Un experimento binomial consiste en repetir "n" veces un ensayo Bernouilli. Una variable aleatoria X sigue una distribución binomial (con parámetros n y p) si expresa el número de realizaciones independientes "n" con la probabilidad "p" y por tanto (1 – p) de obtener fracaso. Se representa por B(n, p); donde B indica binomial, n el número de ensayos y p la probabilidad de éxito.

Ejemplo:
Si tiramos tres veces la moneda al aire y definimos X como el número de caras, esta variable seguirá los parámetros n = 3 y p = 0,5. Lo mismo que B(3; 0,5).

Las características fundamentales son:

1. Función de probabilidad:

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

2. Función de distribución:

$$F(x) = P(X < x) = \sum \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

3. Media: $\mu = np$

4. Varianza : $\sigma^2 = npq;$

donde x es el numero de aciertos, n el número de ensayos, p la probabilidad de éxito de cada ensayo, q la probabilidad de fracaso (1-p) y el número combinatorio $\binom{n}{x}$, que se lee "n sobre x" es igual a $\frac{n!}{x!\,(n - x)!}$.

Ejemplo:
A) Calcularemos la probabilidad de obtener exactamente 2 caras:

$$f(2) = P(X = 2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} .0{,}5^2 .0{,}5^{3-2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} .0{,}5^2 .0{,}5 = \left(\frac{3!}{2!.1!} \right) .0{,}5^2 .0{,}5 =$$

$$= 3.0{,}5^2 .0{,}5 = 3.0{,}25.0{,}5 = 0{,}375$$

B) Calcularemos la probabilidad de obtener dos caras o menos:

$$F(2) = P(X \leq 2) = f(0)+f(1)+f(2) = 0{,}125 + 0{,}375 + 0{,}375 = 0{,}875$$

puesto que:

$$f(0) = P(X = 0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} .0{,}5^0 .0{,}5^{3-0} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} .1.0{,}5^3 = \left(\frac{3!}{0!.3!} \right) .1.0{,}125 = 1.1.0{,}125 = 0{,}125$$

$$f(1) = P(X = 1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} .0{,}5^1 .0{,}5^{3-1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} .0{,}5.0{,}5^2 = \left(\frac{3!}{1!.3!} \right) .0{,}5.0{,}25 = 3.0{,}5.0{,}25 = 0{,}375$$

$$f(2) = P(X = 2) = 0{,}375 \text{ (ver apartado A)}$$

C) Calcular la probabilidad de obtener más de dos caras:

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - F(2) = 1 - 0{,}875 = 0{,}125$$

Podemos calcular también la media y la varianza:

$$\mu = np = 3.0{,}5 = 1{,}5$$
$$\sigma^2 = npq = 3.0{,}5.0{,}5 = 0{,}75$$

Otras distribuciones discretas:

Existen otros modelos de distribuciones discretas. El modelo Poisson de los “sucesos raros”, que se utilizan en condiciones similares a las binomiales pero con un elevado número de ensayos y un valor p muy pequeño.