2012

UNED

DISEÑOS DE INVESTIGACIÓN Y ANÁLISIS DE DATOS

[TEMA 7]

Diseños con más de dos grupos independientes. Análisis de varianza con dos factores completamente aleatorizados

Índice

7.1 Introducción

En los dos capítulos precedentes se han estudiado dos diseños de más de dos grupos, uno con grupos completamente aleatorizados (cap. 5) y otro con grupos de medidas repetidas (cap. 6). En los primeros, las unidades de observación (v.g., sujetos) se asignan aleatoriamente a cada uno de los niveles del factor, de modo que cada sujeto sólo recibe uno de los posibles tratamientos establecidos en el diseño. En los segundos, cada sujeto pasa por todos los tratamientos del diseño. El primer tipo de diseño se conoce como un diseño completamente aleatorizado y el segundo de medidas repetidas. No obstante, aunque ambos tipos de diseños de un solo factor tienen una utilidad muy amplia, no permiten abordar cuestiones complejas que se dan muy a menudo en el mundo "real", como son las posibles interacciones que se pueden dar cuando se manipulan varios factores a la vez y su incidencia sobre la variable objeto de estudio.

Para comprender lo anterior, supongamos que un departamento policial de una gran ciudad está interesado en mejorar la actitud de los nuevos oficiales hacia las minorías radicadas en la ciudad. Los responsables piensan que la mejora dependerá de la duración del curso que se les imparte sobre relaciones humanas, pero no descartan que también sea importante la zona de la ciudad donde se impartirá el curso. Para dar respuesta a esta inquietud, contactan con un consultor estadístico para que les diseñe el experimento de modo que puedan posteriormente tomar decisiones a partir de los resultados. Al ser dos los factores o variables independientes (duración del curso y zona de la ciudad) que hay que considerar, el consultor elabora un diseño en el que por un lado juega con la zona de la ciudad donde se va a impartir y por el otro con la duración. En cada uno de los factores establece tres niveles: en el Factor A (zona) el curso se imparte o en un barrio de clase alta, o de clase media, o en un barrio económicamente deprimido; respecto de la duración del curso establece tres niveles: de 5, de 10 o de 15 horas. Una vez elaborado el diseño, realiza una selección al azar de 45 policías que van a participar en los cursos y asigna 5 a cada combinación de zona y duración. Como variable dependiente se toma la puntuación alcanzada en un test, previamente validado, sobre actitudes hacía los grupos minoritarios.

Con un diseño factorial de este tipo no sólo se pueden alcanzar conclusiones sobre la incidencia que tenga la duración del curso o la ubicación de la oficina policial donde se imparte, que en términos de los diseños experimentales se conoce como *efectos principales del factor*, sino que, además, se pueden llegar a conclusiones sobre si la duración y la zona están relacionados de algún modo, lo cual se conoce como *efectos de interacción* entre los factores. En general, un diseño factorial es más eficiente que varios diseños simples. Es más económico, en el sentido de que proporciona más información con menor número de sujetos, esfuerzo y tiempo. En este capítulo vamos a estudiar la técnica de análisis de diseños de dos factores completamente aleatorizados y presentando las posibilidades de contrastes que estos diseños permiten.

7.2 Objetivos del tema

En este tema vamos a aprender los siguientes aspectos de un diseño factorial de 2 factores completamente aleatorizados:

- La disposición de los datos y la notación.
- Identificar los diversos efectos que están presenten en el diseño (efectos principales, de interacción y simples).
- Método de cálculo para el contraste de la significación estadística de estos efectos.
- Métodos para el cálculo de los efectos simples presentes en el diseño.
- Métodos de cálculo para las comparaciones por pares de los efectos simples significativos.

7.3 ¿Qué información proporciona un diseño factorial?

Pensemos en el diseño expuesto en la introducción. Tal como está planteado, los responsables de la formación de los oficiales de policía pueden contrastar, de manera independiente, el efecto que tiene la zona donde se imparte el curso, al margen de la duración del curso. Para ello sólo se tendrían en cuenta los datos de los 15 oficiales asignados a cada de las zonas (cinco por cada uno de los tres grupos de tiempo) –ver Figura 7.1-. También podrían evaluar el efecto que tiene la duración del curso, al margen de la zona, para lo cual sólo se tendrían en cuenta los datos de los 15 oficiales asignados a cada tiempo de duración de curso, con independencia de la zona en que se imparten. Con esto, estaríamos contrastando los denominados *efectos principales*, que serán tantos como factores hay implicados en el diseño.

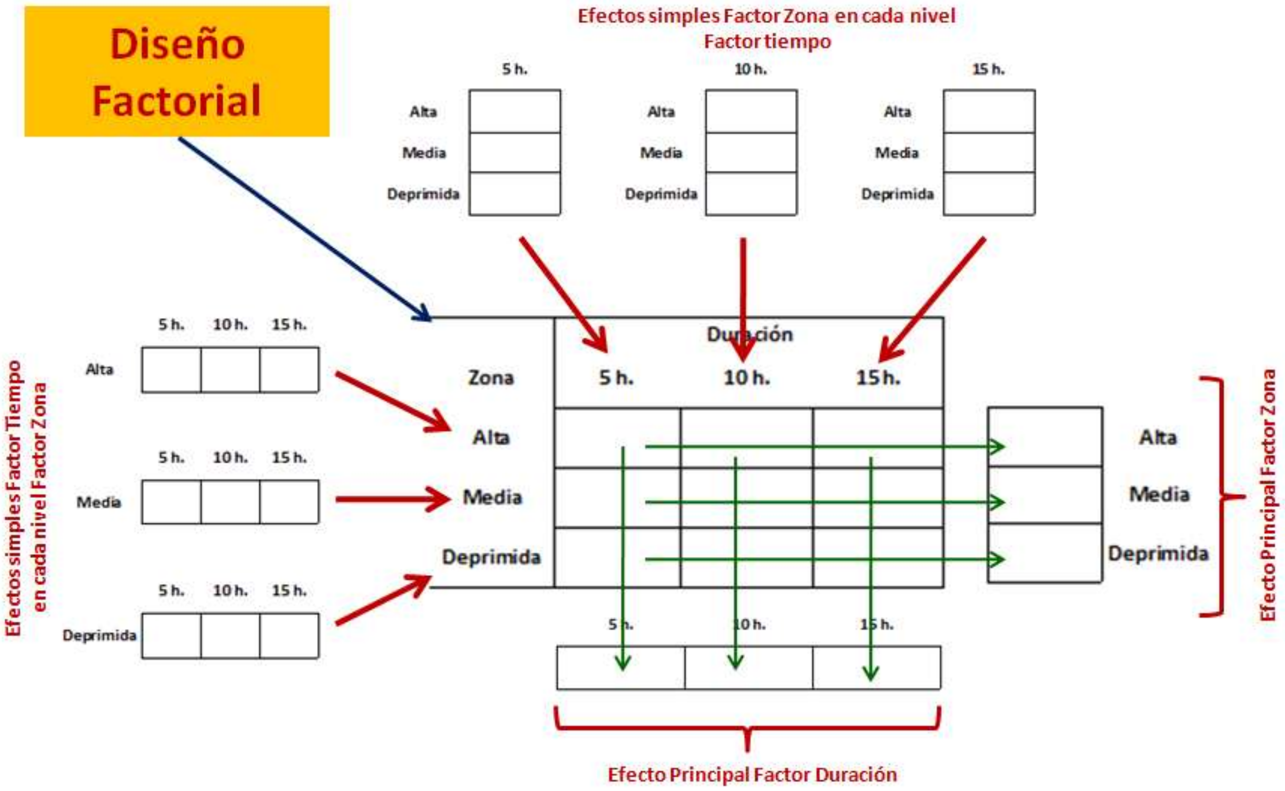


Figura 7.1 *Posibles contrastes en un diseño factorial de dos factores*

Además de estos efectos principales (tantos como factores haya), cuyos contrastes no difieren de los estudiados en el capítulo 5, hay un conjunto de contrastes más focalizados de cada factor con cada nivel del otro factor, que representan los llamados *efectos simples*, en el sentido de que se contrastan los tratamientos de un factor en cada nivel del otro factor. Aplicado al ejemplo de la introducción, un efecto simple es el de la zona en que se imparte el curso cuando esté sólo dura 5 horas. Otro efecto simple es el del tiempo de duración del curso cuando éste se imparte en una zona de clase media. En total, hay tantos efectos simples como la suma de los niveles de cada factor (en nuestro caso 3+3 = 6). En cada uno de estos contrastes sólo entran en juego los sujetos asignados aleatoriamente a cada una de los tres niveles de un factor condicionado a un nivel del otro factor. Para el caso del ejemplo de la introducción, cada nivel estaría compuesto por 5 oficiales.

Un tercer y último efecto es el que se produce por los cruces de los tratamientos (o niveles) de cada uno de los factores, que está relacionado con los denominados efectos simples y que se conoce como *efecto de interacción*. Aunque luego lo veremos con datos, imaginemos, en el ejemplo de las actitudes ante las minorías por parte de los oficiales policiales, que para el caso de la zona alta, la actitud de los oficiales sube conforme aumenta la duración del curso, y lo mismo sucede para las otras zonas. Si este fuera el caso, el comportamiento de la variable dependiente estaría relacionado sólo con la duración del curso y sería independiente de la zona. En este caso, las líneas del gráfico de medias de la VD respecto de la duración, para cada una de las zonas, serían más o menos paralelas. Por el contrario, si se observaran comportamientos diferentes de la VD respecto de la duración en función de la zona, las líneas del gráfico de medias tenderían a cruzarse, o se cruzarían de hecho, en algún lugar del plano, tal como de hecho sucede con los datos del ejemplo que veremos en el próximo epígrafe. En este último caso, diríamos que se ha producido una interacción (que habría que confirmar analíticamente como veremos más adelante).

La presencia de interacción en un diseño factorial obliga a ir más allá de las conclusiones que se sacan a partir de los efectos principales pues éstos, para cada factor, deben ser interpretados teniendo en cuenta los niveles del otro factor. Hay muchas definiciones de interacción, todas ellas equivalentes pero con énfasis en distintos aspectos de la misma. En el Cuadro 7.1 hacemos una relación de éstas para hacerse una idea de la importancia que se le concede a este concepto (interacción entre factores).

Cuadro 7.1 *Definiciones sobre el concepto de interacción en un diseño factorial*

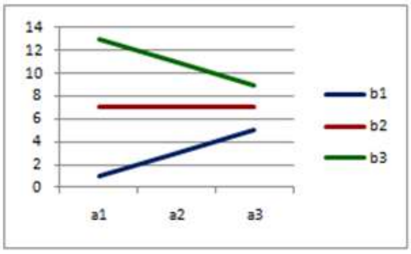
- Una interacción está presente cuando los efectos de una variable independiente sobre la conducta objeto de estudio cambia en los diferentes niveles de la otra variable independiente (este cambio, no significa que una variable independiente influya sobre la otra; de hecho, las variables independientes son, valga la redundancia, independientes entre sí).
- Una interacción está presente cuando los patrones de diferencias asociados con una variable independiente cambian con los diferentes niveles de la otra variable independiente. Para entender esto, supongamos que en un diseño experimental tenemos que uno de los factores está compuesto por tres niveles compuestos por un grupo control y dos tratamientos experimentales. Es posible que consideremos realizar comparaciones entre los dos tratamientos experimentales y entre el control y cada uno de los tratamientos, o entre el control y una combinación de los tratamientos. Si está presente una interacción, el patrón de estas diferencias no será el mismo en cada nivel del otro factor.
- Una interacción está presente cuando los efectos simples de una variable independiente no son los mismos en todos los niveles de la otra variable independiente.
- Una interacción está presente cuando los efectos principales de una variable independiente no son representativos de los efectos simples de esa misma variable.
- Una interacción está presente cuando las diferencias entre las medias de las celdas que representan el efecto de un factor en algún nivel del otro factor no son iguales a las correspondientes diferencias en otro nivel de este factor.
- Una interacción está presente cuando los efectos de una de las variables independientes están condicionalmente relacionado con los niveles de la otra variable independiente (Cohen, 1983).
- Una interacción está presente cuando una variable independiente no tiene un efecto constante en todos los niveles de la otra variable independiente (Pedhazur, 1982).

El estudiante puede observar que hay diferencias más semánticas que conceptuales o estadísticas en estas definiciones. En la diversos gráficos de la Figura 7.2 se proponen algunos ejemplos de datos de diseños factoriales 3x3 (esta es la forma de representar simbólicamente un diseño de dos factores, ya que solo hay dos dígitos, y donde cada uno de ellos está compuesto por tres niveles), donde se muestran gráficos de medias de tratamientos, dos de ellos con interacción y uno sin interacción. Las medias de los tratamientos están representadas encima de cada gráfica.

A modo de resumen y antes de empezar con el ejemplo numérico, la notación y la exposición del modelo estadístico, veremos algunas cuestiones básicas en un diseño factorial.

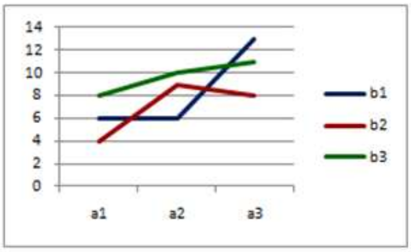
- Un diseño factorial consiste en un conjunto de diseños simples de un factor en el cual la misma variable independiente es manipulada en combinación con una segunda variable independiente.
- Los efectos simples de una variable independiente se refieren a las diferencias entre las medias para cada uno de los componentes del experimento. Si tenemos un factor *A*, las diferencias observadas en el nivel b_1, del factor B, se denominan como efectos simples del factor *A* en el nivel b_1.
- Las interacciones se definen en términos de las comparaciones entre un conjunto de efectos simples. Están presentes cuando se encuentra que los efectos simples asociados con una variable independiente no son los mismos en todos los niveles de la otra variable independiente.
- Los efectos principales de una variable independiente o factor se refieren a los efectos promedio totales de una variable y se obtienen combinando el conjunto completo de componentes experimentales presentes en ese factor.

	a_1	a_2	a_3
b_1	1	3	5
b_2	7	7	7
b_3	13	11	9



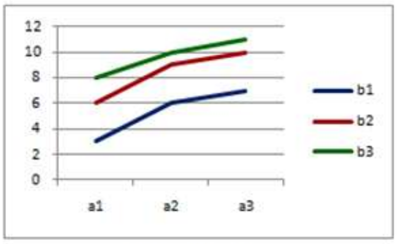
(a) Interacción sin cruce

	a_1	a_2	a_3
b_1	6	6	13
b_2	4	9	8
b_3	8	10	11



(a) Interacción con cruce

	a_1	a_2	a_3
b_1	3	6	7
b_2	6	9	10
b_3	8	10	11



(a) Sin interacción

Figura 7.2 *Gráficos con interacción (a y b) y sin interacción entre dos factores*

7.4 Reglas para el cálculo de los efectos principales y del efecto de interacción

En el capítulo 5 se ha explicado el procedimiento de cálculo para los efectos de los tratamientos de un factor a partir de las llamadas razones básicas, y a partir de éstas, el cálculo de las sumas de cuadrados (SC), las medias cuadráticas (MC) y el valor del estadístico F. También se explicó cómo la variabilidad total del sistema (la suma de cuadrados total) se puede partir en dos sumas de cuadrados independientes; por una parte la que refleja la variabilidad entre los tratamientos (suma de cuadrados entre-grupos) y por otra la que refleja la variabilidad dentro de los tratamientos (suma de cuadrados intra-grupos). En los diseños factoriales de 2 factores (que denotaremos genéricamente como los factores A y B) se sigue un patrón de análisis similar, pero en esta ocasión la suma de cuadrados entre-grupos se divide a su vez en tres componentes que reflejan: (1) la suma de cuadrados entre tratamientos del factor A (SC_A), que refleja los efectos principales del factor A; (2) la suma de cuadrados entre tratamientos del factor B (SC_B), que refleja los efectos principales del factor B; y (3) la suma de cuadrados que representa la interacción entre A y B (SC_{AxB}). En este capítulo sólo consideraremos los diseños equilibrados, es decir aquellos que tienen el mismo número de casos o sujetos por cada tratamiento (en este caso sería mejor decir cruce por tratamientos).

7.4.1 Diseño y notación

Los datos en un diseño factorial de dos factores se pueden representar en una tabla de doble entrada (como la representada en la Figura 7.1) o en forma de columnas con las dos primeras filas representando las diferentes combinaciones de los niveles de los factores. En las diferentes tablas representadas en la Figura 7.3 se pueden ver estas dos configuraciones en que pueden presentarse los datos de un diseño de 2 factores. Para un diseño como el planteado en la introducción, con 2 factores (3 niveles por factor y 5 sujeto en cada cruce de tratamiento) diríamos que tenemos un diseño factorial 3x3 (al tener 3 niveles cada factor, el número de tratamientos es 9, es decir, el producto de los niveles de los factores 3 x 3 = 9).

Una observación genérica se representa como Y_{ijk}, siendo *i* el nivel genérico del factor A, *j* el nivel genérico del factor B, y *k* la observación genérica dentro del tratamiento AB_{ij}. A partir de esta matriz de datos donde se representan los valores de la variable dependiente dentro de cada tratamiento (AB_{ij}), se obtienen las sumas de los tratamientos de cada factor (que en la figura se designan como sumas marginales -A_i para el factor A, y B_j para el factor B-) y la suma total de todas las observaciones representada por T. En la secuencia de tablas de la Figura 7.3 se reflejan las sumas básicas que hay que realizar, a partir de las cuales se obtienen las denominadas razones básicas y posteriormente las sumas de cuadrados.

Diseño Factorial de 2 factores

		Factor A		
		a_1	a_2	a_3
Factor B	b_1	n = 5	n = 5	n = 5
	b_2	n = 5	n = 5	n = 5
	b_3	n = 5	n = 5	n = 5

Matriz de Datos

Combinaciones de tratamientos

a_1 b_1	a_1 b_2	a_1 b_3	a_2 b_1	a_2 b_2	a_2 b_3	a_3 b_1	a_3 b_2	a_3 b_3
$Y_{1,1,1}$	$Y_{1,2,1}$	$Y_{1,3,1}$	$Y_{2,1,1}$	$Y_{2,2,1}$	$Y_{2,3,1}$	$Y_{3,1,1}$	$Y_{3,2,1}$	$Y_{3,3,1}$
$Y_{1,1,2}$	$Y_{1,2,2}$	$Y_{1,3,2}$	$Y_{2,1,2}$	$Y_{2,2,2}$	$Y_{2,3,2}$	$Y_{3,1,2}$	$Y_{3,2,2}$	$Y_{3,3,2}$
$Y_{1,1,3}$	$Y_{1,2,3}$	$Y_{1,3,3}$	$Y_{2,1,3}$	$Y_{2,2,3}$	$Y_{2,3,3}$	$Y_{3,1,3}$	$Y_{3,2,3}$	$Y_{3,3,3}$
$Y_{1,1,4}$	$Y_{1,2,4}$	$Y_{1,3,4}$	$Y_{2,1,4}$	$Y_{2,2,4}$	$Y_{2,3,4}$	$Y_{3,1,4}$	$Y_{3,2,4}$	$Y_{3,3,4}$
$Y_{1,1,5}$	$Y_{1,2,5}$	$Y_{1,3,5}$	$Y_{2,1,5}$	$Y_{2,2,5}$	$Y_{2,3,5}$	$Y_{3,1,5}$	$Y_{3,2,5}$	$Y_{3,3,5}$
$AB_{1,1}$	**$AB_{1,2}$**	**$AB_{1,3}$**	**$AB_{2,1}$**	**$AB_{2,2}$**	**$AB_{2,3}$**	**$AB_{3,1}$**	**$AB_{3,2}$**	**$AB_{3,3}$**

Matriz AB

Niveles del Factor A

Niveles del Factor B		a_1	a_2	a_3	
	b_1	$AB_{1,1}$	$AB_{2,1}$	$AB_{3,1}$	B_1
	b_2	$AB_{1,2}$	$AB_{2,2}$	$AB_{3,2}$	B_2
	b_3	$AB_{1,3}$	$AB_{2,3}$	$AB_{3,3}$	B_3
		A_1	A_2	A_3	T

Sumas Marginales Factor B

Sumas Marginales Factor A

Figura 7.3 *Disposición de los datos en un diseño factorial para su ulterior análisis*

A partir de los sumatorios, también se pueden obtener las medias generales para cada factor, para el total del sistema y para la interacción, mediante un sencillo juego de fórmulas:

$\bar{Y}_T = \frac{T}{(a)(b)(n)}$	$\bar{Y}_{AB} = \frac{AB}{(n)}$
$\bar{Y}_A = \frac{A}{(b)(n)}$	$\bar{Y}_B = \frac{B}{(a)(n)}$

7.4.2 Variabilidad del sistema

En el capítulo 5 ya hemos tenido ocasión de comprobar que la suma de cuadrados total es igual a la suma de cuadrados entre-grupos (o tratamientos, o inter-grupo) y la suma de cuadrados intra-grupo:

$$\boldsymbol{SC_{Total} = SC_{Inter} + SC_{Intra}} \qquad \text{Ecuación 7.1}$$

Esta igualdad se mantiene en un diseño factorial aunque con algunas consideraciones sobre en qué componentes está basada ahora la suma de cuadrados entre-grupos (SC_{Inter}).

En un diseño de un único factor, SC_{Inter} está basada en las desviaciones de las medias de cada tratamiento respecto a la media total, es decir, siendo A el factor, y prescindiendo de los sumatorios propios en el cálculo de las sumas de cuadrados, SC_{Inter} está basada en las desviaciones $\bar{Y}_{A_i} - \bar{Y}_T$. Sin embargo, en un diseño factorial de dos factores, SC_{Inter} está basada en las desviaciones de las medias de cada tratamiento conjunto **AB**, respecto de la media total, es decir, $\bar{Y}_{AB_{ij}} - \bar{Y}_T$.

Si pensamos en un grupo de sujetos que reciben una combinación de tratamientos A y B, la desviación respecto de la media total del sistema puede estar influida por tres componentes: el Factor A, el Factor B, y la interacción entre A y B. A su vez, cada una de estas influencias puede ser expresada de la siguiente forma (véase Ecuación 7.2):

$$\bar{Y}_{AB_{ij}} - \bar{Y}_T = \left(\bar{Y}_{A_i} - \bar{Y}_T\right) + \left(\bar{Y}_{B_j} - \bar{Y}_T\right) + \left(\bar{Y}_{AB_{ij}} - \bar{Y}_{A_i} - \bar{Y}_{B_j} + \bar{Y}_T\right) \qquad \text{Ecuación 7.2}$$

A partir de aquí, y con leves transformaciones algebraicas, se concluye que la desviación de cualquier puntuación individual respecto de la media total del conjunto de datos del diseño se puede dividir en cuatro componentes de desviación (ver Ecuación 7.3):

$$Y_{ijk} - \bar{Y}_T = \left(\bar{Y}_{A_i} - \bar{Y}_T\right) + \left(\bar{Y}_{B_j} - \bar{Y}_T\right) + \left(\bar{Y}_{AB_{ij}} - \bar{Y}_{A_i} - \bar{Y}_{B_j} + \bar{Y}_T\right) + \left(Y_{ijk} - \bar{Y}_{AB_{ij}}\right) \qquad \text{Ecuación 7.3}$$

El primer componente es el relacionado con los efectos del tratamiento A_i, el segundo es el relacionado con los efectos del tratamiento B_j, el tercero es el efecto de la interacción entre ambos factores, y el cuarto es la desviación de la puntuación del sujeto respecto del tratamiento que le ha sido asignado aleatoriamente. A partir de aquí, solo quedarían por realizar los sumatorios y elevar al cuadrado para obtener las correspondientes sumas de cuadrados para el análisis de varianza

Una vez detectadas las fuentes de variabilidad de cada observación, tres de ellas relacionadas con los tratamientos (que expresarían, además del error experimental, las posibles diferencias que pudieran darse entre tratamientos), y una relacionada con su propio grupo (que sería la expresión del error experimental, únicamente), fuentes que denominaremos, siguiendo el esquema de capítulos anteriores, *A*, *B*, *AB* y *S/AB*, tenemos que determinar los grados de libertad para cada una de estas fuentes. Para los efectos principales se sigue la misma regla del número de tratamientos menos 1. Por tanto (véase la Ecuación 7.4)

$$gl_A = a - 1 \qquad y \qquad gl_B = b - 1 \qquad \text{Ecuación 7.4}$$

Los grados de libertad de la interacción es el resultado del producto de los grados de libertad asociados con los factores A y B.

$$gl_{AB} = (a - 1)(b - 1) \qquad \text{Ecuación 7.5}$$

Los grados de libertad debidos al error experimental, es decir, a las diferencias individuales dentro de cada tratamiento considerando que en cualquiera de ellos los grados de libertad son n-1, los asociados al error son (véase Ecuación 7.6):

$$gl_{S/AB} = (a)(b)(n - 1) \qquad \text{Ecuación 7.6}$$

7.4.3 Proceso de cálculo del ANOVA de dos factores

Comenzaremos con la tabla donde se resumen las razones básicas para realizar el cálculo posterior de las sumas de cuadrados (Tabla 7.1), basadas en los sumatorios reflejados en la tabla de la matriz AB de la Figura 7.3

Tabla 7.1. *Cálculo de las razones básicas*

Cantidad Básica	Sumas y cuadrados implicados	Razón básica	Código
A	$\sum A^2$	$\frac{\sum A^2}{(b)(n)}$	[A]
B	$\sum B^2$	$\frac{\sum B^2}{(a)(n)}$	[B]
AB	$\sum (AB)^2$	$\frac{\sum (AB)^2}{(n)}$	[AB]
Y	$\sum Y^2$	$\sum Y^2$	[Y]
T	T^2	$\frac{T^2}{(a)(b)(n)}$	[T]

A partir de estas razones, obtener las sumas de cuadrados es sencillo. En la Tabla 7.2, se puede ver la tabla resumen del ANOVA con las fórmulas de cómputo a partir de las razones básicas. Los totales para SC_A son las sumas marginales del factor A, los totales para SC_B son las sumas marginales del factor B, ambos representados en la matriz AB de la figura 7.3, y las sumas para la razón [AB] se obtienen directamente de los totales de la matriz de datos de la misma figura.

Tabla 7.2 *Fórmulas de cálculo y tabla del ANOVA de dos factores*

Fuente de Variación	Fórmula cálculo Sumas de Cuadrados	grados de libertad	Medias Cuadráticas	F
A	$SC_A = [A] - [T]$	a - 1	$MC_A = \frac{SC_A}{gl_A}$	$\frac{MC_A}{MC_{S/AB}}$
B	$SC_B = [B] - [T]$	b – 1	$MC_B = \frac{SC_B}{gl_B}$	$\frac{MC_B}{MC_{S/AB}}$
A x B	$SC_{AB} = [AB] - [A] - [B] + [T]$	(a – 1)(b – 1)	$MC_{AB} = \frac{SC_{AB}}{gl_{AB}}$	$\frac{MC_{AB}}{MC_{S/AB}}$
Intra (S/AB)	$SC_{Intra} = [Y] - [AB]$	(a)(b)(n-1)	$MC_{S/AB} = \frac{SC_{S/AB}}{gl_{S/AB}}$	
Total	$SC_T = [Y] - [T]$	(a)(b)(n)-1		

7.4.4 Desarrollo del ANOVA de 2 factores con un ejemplo numérico

Vamos ahora a desarrollar la técnica con los datos del ejemplo referido en la introducción sobre mejora de las actitudes hacia las minorías por parte de jóvenes oficiales de policía. En total hay 45 observaciones repartidas entre los 9 tratamientos, que son los que se producen por el cruce de los 3 tratamientos de cada factor. Llamaremos factor A a las zonas donde se realiza el curso, con tres niveles, *alta*, *media* y *deprimida* (a=3) y factor B a la duración del curso, también con tres niveles, *5*, *10* y *15 horas* (b=3). Los datos obtenidos son:

a_1 b_1	a_1 b_2	a_1 b_3	a_2 b_1	a_2 b_2	a_2 b_3	a_3 b_1	a_3 b_2	a_3 b_3
24	44	38	30	35	26	21	41	42
33	36	29	21	35	32	18	39	52
37	25	28	39	27	36	10	50	53
29	27	47	26	31	46	31	36	49
42	43	48	34	22	45	20	34	64

Condiciones y supuestos. Al igual que en el análisis de la varianza para un factor visto en el tema 5, el nivel de medida de la variable dependiente ha de ser de intervalo o razón. Suponemos que las observaciones son independientes, que en la población las distribuciones son normales para todos los grupos y que las varianzas son homogéneas (homocedasticidad).

Hipótesis. Al trabajar con dos factores se plantean tres hipótesis nulas. Para el factor A, para el factor B y para la interacción:

Para el factor A la hipótesis nula especifica que no existen diferencias entre las tres condiciones de dicho factor:

$$H_0: \mu_{A_1} = \mu_{A_2} = \mu_{A_3}$$

$H_1: \mu_{A_1} \neq \mu_{A_2} \neq \mu_{A_3}$ al menos para un par de tratamientos

Para el factor B:

$$H_0: \mu_{B_1} = \mu_{B_2} = \mu_{B_3}$$

$H_1: \mu_{B_1} \neq \mu_{B_2} \neq \mu_{B_3}$ al menos para un par de tratamientos

Por último, para la interacción:

$$H_0: No\ existe\ interacción$$

$$H_1: Existe\ interacción$$

Estadístico de contraste y distribución muestral. Se han de calcular tres estadísticos de contraste, uno para cada una de las hipótesis nulas. En la Tabla 7.3 se muestran las sumas totales de las puntuaciones de cada tratamiento. A continuación se calcula la matriz AB donde se presentan los resultados de las sumas para cada tratamiento, las sumas marginales y la suma total.

Tabla 7.3 *Datos del ejemplo numérico*

Matriz de Datos

	a_1	a_1	a_1	a_2	a_2	a_2	a_3	a_3	a_3
	b_1	b_2	b_3	b_1	b_2	b_3	b_1	b_2	b_3
	24	44	38	30	35	26	21	41	42
	33	36	29	21	35	32	18	39	52
	37	25	28	39	27	36	10	50	53
	29	27	47	26	31	46	31	36	49
	42	43	48	34	22	45	20	34	64
Suma	165	175	190	150	150	185	100	200	260
Media	33	35	38	30	30	37	20	40	52
Desv.Típic	6.229	7.874	8.509	6.229	4.980	7.642	6.723	5.550	7.127

Matriz AB

	Factor A			
Factor B	a_1 (zona alta)	a_2 (zona media)	a_3 (zona deprimida)	**Suma**
b_1 **(5 h.)**	165	150	100	415
b_2 **(10 h.)**	175	150	200	525
b_3 **(15 h.)**	190	185	260	635
Suma	530	485	560	1575

Los resultados de las razones básicas a partir de estos datos son:

$$[\boldsymbol{Y}] = 24^2 + 33^2 + 37^2 + \cdots + 53^2 + 49^2 + 64^2 = \mathbf{60265}$$

$$[\boldsymbol{T}] = \frac{1575^2}{(3)(3)(5)} = \mathbf{55125}$$

$$[\boldsymbol{A}] = \frac{530^2 + 485^2 + 560^2}{(3)(5)} = \mathbf{55315}$$

$$[\boldsymbol{B}] = \frac{415^2 + 525^2 + 635^2}{(3)(5)} = \mathbf{56738{,}333}$$

$$[\boldsymbol{AB}] = \frac{165^2 + 150^2 + \cdots + 185^2 + 260^2}{(5)} = \mathbf{58155}$$

A partir de estos valores se calculan las sumas de cuadrados

$$\boldsymbol{SC_A} = [A] - [T] = 55315 - 55125 = \mathbf{190}$$

$$\boldsymbol{SC_B} = [B] - [T] = 56738{,}333 - 55125 = \mathbf{1613{,}333}$$

$$\boldsymbol{SC_{AB}} = [AB] - [A] - [B] + [T] = 58155 - 55315 - 56738{,}333 + 55125 = \mathbf{1226{,}667}$$

$$\boldsymbol{SC_{S/AB}} = [Y] - [AB] = 60265 - 58155 = \mathbf{2110}$$

$$\boldsymbol{SC_T} = [Y] - [T] = 60265 - 55125 = \mathbf{5140}$$

Se comprueba que $\boldsymbol{SC_T = SC_A + SC_B + SC_{AB} + SC_{S/AB}}$.

A continuación se presenta en la Tabla 7.4, el resumen del ANOVA con todos los resultados:

Tabla 7.4. *Resumen del Análisis de Varianza*

Fuente de Variación	Sumas de Cuadrados	grados de libertad	Medias Cuadráticas	F
A	190	2	95	1,621
B	1613,333	2	806,667	13,763*
A x B	1226,667	2x2= 4	306,667	5,232*
Intra (S/AB)	2110	3x3x(5-1) =36	58,611[1]	
Total	5140			

La distribución muestral para todos de los estadísticos de contraste (columna F) sigue el modelo F de Fisher con sus correspondientes grados de libertad. En este caso para los factores A y B son 2 y 36 grados de libertad y para la interacción 4 y 36 grados de libertad, como se puede consultar en la Tabla 7.4.

Regla de decisión. Mediante un programa informático adecuado (con las tablas se tomarían los grados de libertad más próximos), podemos comprobar que los valores críticos son, al nivel de confianza del 95%:

$F_{0,95;2;36} = 3{,}2595$ Para los factores A y B y $F_{0,95;4;36} = 2{,}6335$ para la interacción.

Observamos que rechazamos la hipótesis nula para el factor B (13,763 > 3,2595) y para la interacción (5,232 > 2,6335), lo que queda reflejado en la Tabla 7.4 con un asterisco para los valores F correspondientes, pero mantenemos la hipótesis nula para el factor A (1.621 < 3,2595).

[1] Al mismo resultado se llega sumando las varianzas de todos los tratamientos y dividiendo el resultado por el de tratamientos. Para los datos del ejemplo $MC_{S/AB} = \frac{(6{,}964)^2+(8{,}803)^2+\cdots+(6{,}205)^2+(7{,}969)^2}{(3)(3)} = 58{,}611$

Conclusión. Los resultados ponen de manifiesto que los efectos principales del factor B (duración del curso) y de la interacción son significativos. Conviene, no obstante, representar gráficamente las medias de los tratamientos cada uno de los factores, para ver los efectos principales, y también las medias de los tratamientos para ver el sentido de la interacción a través de la representación de los efectos simples. En las gráficas de las Figuras 7.4 (a) (b) (c) y (d), se representan estos valores mediante diagramas de líneas.

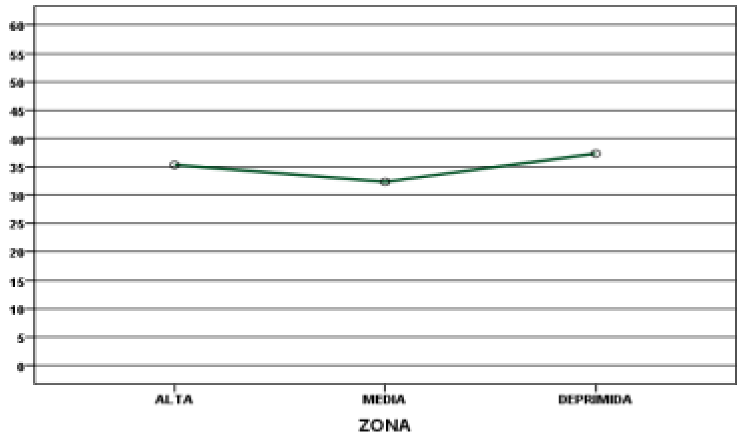


Figura 7.4 (a) *Medias de los efectos principales del factor Zona*

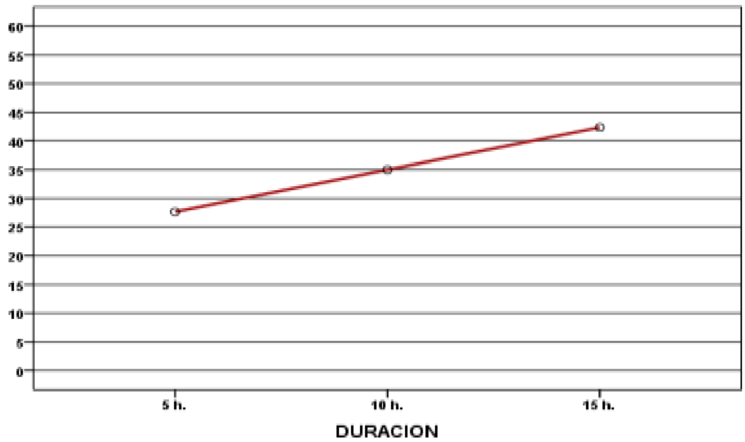


Figura 7.4 (b) *Medias de los efectos principales del factor Duración del curso*

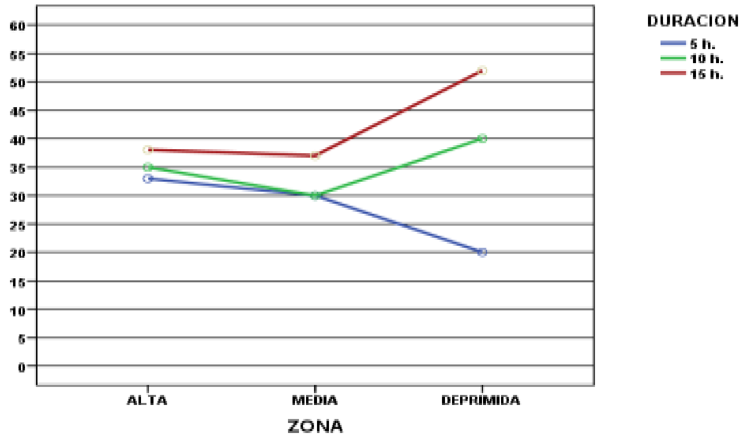


Figura 7.4 (c) *Medias de los efectos simples del factor Zona para cada uno de los niveles del factor Duración del curso*

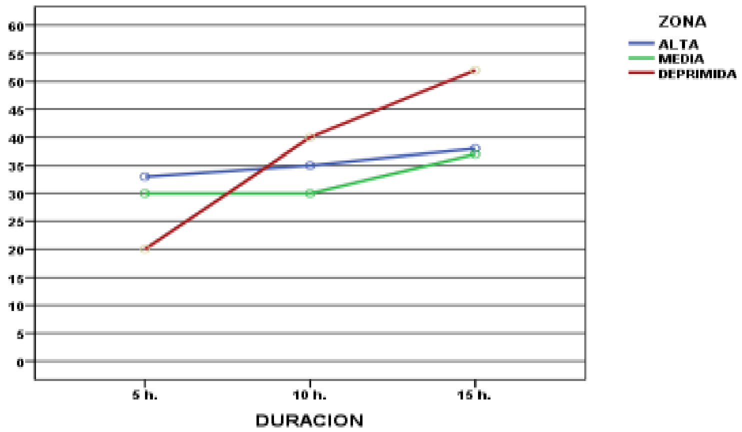


Figura 7.4 (d) *Medias de los efectos simples del factor Duración del curso para cada uno de los niveles del factor Zona*

A partir de los gráficos es posible anticipar, antes de proceder al análisis de las comparaciones, por qué la interacción resulta significativa. En todos los gráficos se ha puesto la misma escala de valores en el eje de ordenadas (de 0 a 60) para facilitar la comparación entre ellos. Observe el estudiante los gráficos 7.3 (a) y 7.3 (d), que representan, el primero, los efectos principales del factor Zona, y el segundo, los efectos simples del factor Zona en función de los tres niveles del factor Duración. Como demuestra la tabla del ANOVA, los tratamientos del factor Zona no resultan ser estadísticamente diferentes, y esto es lo que debería suceder en cada uno de los tres efectos simples. Sin embargo, el gráfico (d) muestra que esta ausencia de diferencias no parece darse en todas los niveles del otro factor. Quizás no haya diferencias entre zonas en los niveles de 5 y 10 horas, pero sí se observan diferencias en el nivel de 15 horas, entre, por un lado, las zonas alta y media (con una puntuación media de 38 y 37, respectivamente), y por otro la zona deprimida (con una puntuación media de 52).

En el caso del factor Duración es posible que haya también un efecto de interacción, pero justo en sentido contrario al del factor Zona. En este caso, la prueba F resulta significativa y las comparaciones múltiples señalan que hay diferencias entre los tres niveles de duración (sugerimos al estudiante que lo compruebe con la prueba de Scheffé, explicada en el capítulo 5). Si observamos el gráfico 7.4 (c), se ve claramente que estas diferencias no se manifiestan en todos los niveles del factor Zona. En el nivel zona alta, las puntuaciones medias son muy similares, y en el nivel zona media, las puntuaciones de 5 y 10 horas son idénticas, siendo algo mayor la puntuación media para 15 horas, diferencia que sí puede resultar significativa. Por último, en el nivel zona deprimida es posible que sí se registren diferencias entre las puntuaciones promedio para las tres zonas. Posteriormente veremos si estas conjeturas que hemos realizado sobre las gráficas tienen respaldo estadístico al realizar los contrastes sobre los efectos simples.

7.5 El modelo estadístico

El modelo estadístico que subyace en un diseño factorial de 2 factores completamente aleatorizados es un modelo lineal en el cual se especifican los componentes que contribuyen a explicar cualquier puntuación Y_{ijk}. Este modelo se puede expresar del siguiente modo:

$$Y_{ijk} = \mu_T + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$ Ecuación 7.7

Donde:

- μ_T es la media total de la población
- α_i es el promedio del efecto del tratamiento en el nivel a_i ($\alpha_i = \mu_i - \mu_T$)
- β_j es el promedio del efecto del tratamiento en el nivel b_j ($\beta_j = \mu_j - \mu_T$)
- $(\alpha\beta)_{ij}$ es el efecto de la interacción en la celda a_ib_j ($(\alpha\beta)_{ij} = \mu_{ij} - \mu_i - \mu_j + \mu_T$)
- ε_{ijk} es el error experimental asociado con cada puntuación ($\varepsilon_{ijk} = Y_{ijk} - \mu_{ij}$)

Las hipótesis estadísticas con este modelo también se pueden expresar de la siguiente forma:

Efectos Principales del Factor A	**H_0: Todos los $\alpha_i = 0$**
	H_1: No todos los $\alpha_i = 0$
Efectos Principales del Factor B	**H_0: Todos los $\beta_j = 0$**
	H_1: No todos los $\beta_j = 0$
Interacción A x B	**H_0: Todos los $\alpha\beta_{ij} = 0$**
	H_1: No todos los $\alpha\beta_{ij} = 0$

7.6 Análisis de la interacción

La prueba anterior en donde se evaluó la significatividad de los efectos principales y la interacción entre factores se conoce como prueba *ómnibus* (global) debido a que no diferencia entre niveles, esto es, el efecto de un factor principal con tres niveles puede ser significativo según el test anterior pero éste no nos indicará si las tres comparaciones posibles entre niveles son todas ellas significativas o solo lo son un subconjunto de las mismas.

Una vez realizada la prueba ómnibus, el siguiente paso es comprobar si el efecto de interacción resulta significativo. La secuencia lógica de análisis sería la que se muestra en el diagrama de flujo de la Figura 7.5

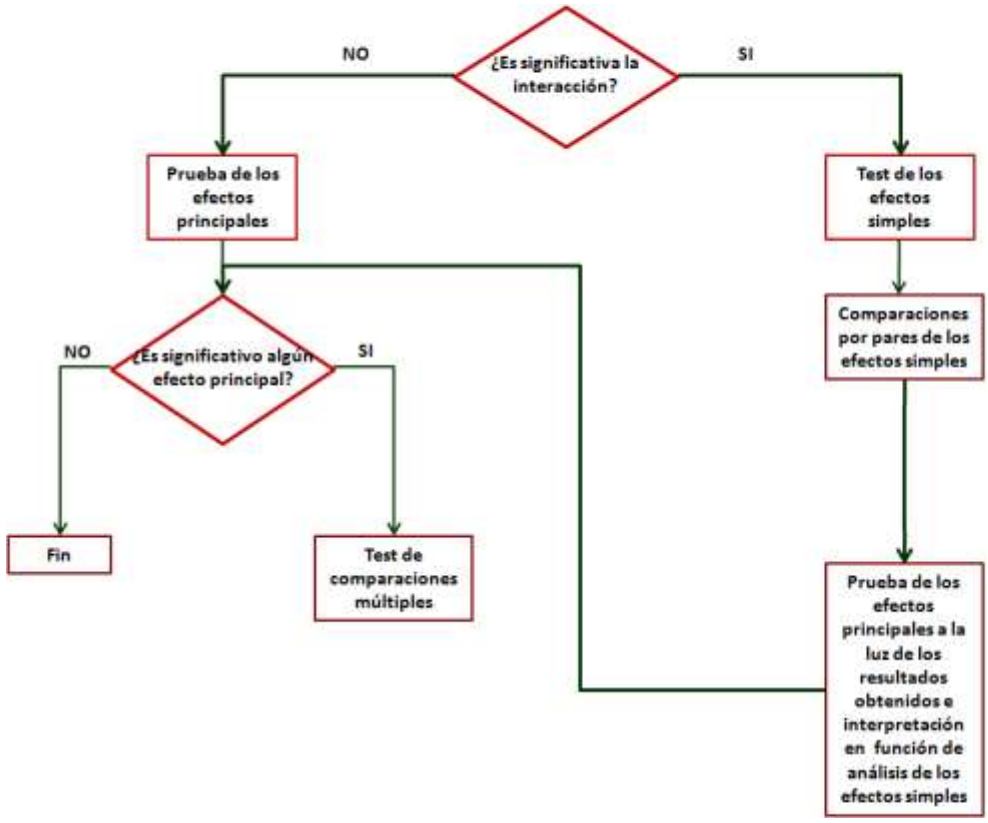


Figura 7.5 *Secuencia de análisis en un diseño factorial*

El que el efecto de interacción sea significativo no supone que no prestemos atención a los efectos principales, sólo que su interpretación, caso de resultar significativos, debe hacerse, como señala el diagrama, teniendo en cuenta los resultados obtenidos en el análisis de los efectos simples, y sobre todo el marco teórico en el que se desarrollan las hipótesis de investigación. No obstante, como ya hemos mencionado, en este capítulo sólo nos interesaremos por el análisis de la interacción.

Retomando nuestro ejemplo, comenzaremos por el contraste de los efectos simples. Para este análisis partimos de la matriz AB, que contiene las sumas de las puntuaciones de los tratamientos. En la Tabla 7.5 reflejamos esta matriz para los datos que nos sirven de ejemplo. La manera de enfocar este análisis es convertir cada columna o fila de la matriz AB en un diseño de un solo factor y luego obtener las sumas de cuadrados entre grupos del mismo modo que se ha hecho con las sumas de cuadrados de los efectos principales.

Tabla 7.5 *Matriz AB. Datos del ejemplo*

	Factor A			
Factor B	**a_1 (zona alta)**	**a_2 (zona media)**	**a_3 (zona deprimida)**	**Suma**
b_1 (5 h.)	165	150	100	415
b_2 (10 h.)	175	150	200	525
b_3 (15 h.)	190	185	260	635
Suma	530	485	560	1575

Para estudiar el factor A en la condición b_1 del factor B, se calculan las razones básicas:

$$[A\ en\ b_1] = \frac{\sum AB_{i1}^2}{n} \qquad\qquad [B_1] = \frac{B_1^2}{(a)(n)}$$

Siendo la suma de cuadrados:

$$SC_{A\ en\ b_1} = [A\ en\ b_1] - [B_1], \quad \text{(con } a-1 \text{ grados de libertad).}$$

Las medias cuadráticas para los efectos simples se obtienen de la misma manera que en el análisis general, dividiendo la suma de cuadrados por los grados de libertad. El denominador de la F es la media cuadrática intra-grupos del análisis general, es decir:

$$F = \frac{MC_{A\ en\ b_1}}{MC_{S/AB}} = \frac{\dfrac{SC_{A\ en\ b_1}}{a-1}}{MC_{S/AB}}$$

Del mismo modo se calcularían los efectos simples para el factor B en relación a los niveles del factor A.

Para ilustrar cómo se realizan los cálculos, por ejemplo, para el factor A en el nivel b_1:

$$SC_{A\ en\ b_1} = \frac{\sum AB_{i1}^2}{n} - \frac{B_1^2}{(a)(n)} = \frac{(165)^2 + (150)^2 + (100)^2}{5} - \frac{415^2}{(3)(5)} = 463{,}33$$

Y para el factor B en el nivel a_2:

$$SC_{B\ en\ a_2} = \frac{\sum AB_{2j}^2}{n} - \frac{A_2^2}{(b)(n)} = \frac{(150)^2 + (150)^2 + (185)^2}{5} - \frac{485^2}{(3)(5)} = 163{,}33$$

Al haber tres niveles por factor, los grados de libertad serán 2 (a – 1 y b – 1) para ambas sumas de cuadrados y las medias cuadráticas serán el resultado del cociente entre las SC y sus grados de libertad. En la Tabla 7.6 se refleja el resultado del contraste para todos los efectos simples con su significación estadística señalada con un asterisco en la columna de la derecha.

Tabla 7.6 *Tabla resumen ANOVA con los resultados de los efectos simples*

FV	SC	gl	MC	F	Sig.
SC_{AB1}	463,33	2	231,667	3,953	**
SC_{AB2}	250	2	125	2,133	
SC_{AB3}	703,33	2	351,667	6	**
SC_{BA1}	63,33	2	31,667	0,540	
SC_{BA2}	163,33	2	81,667	1,393	
SC_{BA3}	2613,33	2	1306,667	22,294	**
$SC_{S/AB}$	2110	36	58,611		

Siguiendo la secuencia del diagrama de la Figura 7.5, pasaríamos a efectuar las comparaciones por pares dentro de los niveles donde se han detectado diferencias significativas y que no veremos en este curso.

7.6.2 ¿Cómo se actúa cuando no es significativo el efecto de la interacción?

Cuando se analiza un diseño factorial, se hace la prueba ómnibus para los efectos principales y el efecto de interacción. Si ésta última no es significativa, es preciso rehacer el análisis focalizándolo sólo sobre los efectos principales. Esto tiene consecuencias en la tabla del ANOVA, en el sentido de que aumenta la suma de cuadrados del error en la misma cuantía que la suma de cuadrados de la interacción, y también los grados de libertad en la misma cuantía que los grados de libertad del efecto de interacción. La consecuencia es que el valor de la F del contraste se reduce, por el aumento que se da en el valor de la media cuadrática del error. En la tabla 7.7 se puede ver la tabla resumen del ANOVA con el efecto de interacción incluido (a) y la misma sin el efecto de interacción (b).

Tabla 7.7 (a) *Tabla resumen del ANOVA con el efecto de interacción*

FV	SC	gl	MC	F	Sig.
SC_A	190	2	95	1,621	
SC_B	1613,33	2	806,667	13,763	**
SC_{AB}	1226,67	4	306,667	5,232	**
$SC_{S/AB}$	2110	36	58,611		
SC_T	5140	44			

Tabla 7.7 (b) *Tabla resumen del ANOVA sin el efecto de interacción*

FV	SC	gl	MC	F	Sig.
SC_A	190,000	2	95,000	1,139	
SC_B	1613,333	2	806,667	9,670	**
$SC_{S/AB}$	3336,67	40	83,417		
SC_T	5140,000	45			

Cuando el efecto de interacción no forma parte del modelo, el valor de la suma de cuadrados del error es igual a la suma de cuadrados del error cuando entra la interacción y la suma de cuadrados de la interacción. Observe que 3336,67 = 2110 + 1226,67 y los grados de libertad 40 = 36 + 4. Los valores de F para los efectos principales son inferiores, por el aumento de la media cuadrática del error que pasa de 58,611 a 83,417.

7.7 Resumen

En este capítulo hemos visto el procedimiento de análisis de los diseños factoriales de 2 factores completamente aleatorizados, que son útiles por la economía de sujetos que supone y el número de contrastes que se pueden realizar con un conjunto no muy grande de datos.

Todos los diseños factoriales se pueden descomponer en un conjunto de efectos mutuamente independientes: los denominados efectos principales de cada factor y los efectos de interacción entre los factores. Los dos primeros son los efectos de los tratamientos de cada factor con independencia del otro factor, mientras los segundos son los efectos que se producen por el cruce de los factores

En el proceso de análisis, la prueba *ómnibus* informa de la significación estadística tanto de los efectos principales como de los de la interacción. Si los primeros son significativos, se procede a las comparaciones múltiples entre los tratamientos. Si son los segundos significativos, es preciso analizar cuáles de los diferentes efectos simples que explican este efecto.

En el procedimiento de análisis de los efectos simples es muy similar al seguido para un diseño de un solo factor completamente aleatorizado. El total de efectos simples no son independientes de los efectos principales ni de los efectos de interacción, más bien estos dos efectos están contenidos en el conjunto de efectos simples.

7.8 Ejercicios de autoevaluación

Supongamos "**el nivel de aspiración**" como variable dependiente en un experimento, en el que la tarea experimental consiste en un juego aparentemente difícil que implica ciertas habilidades motoras y en el que se da una puntuación según la ejecución del sujeto. No obstante, es todo apariencia y en realidad el sujeto desconoce que el juego está bajo control del experimentador, de tal modo que a cada sujeto se le otorga siempre la misma puntuación. Después de un número de ensayos determinado, durante el cual el sujeto recibe la puntuación pre-asignada, se le pide al sujeto que prediga la puntuación para el próximo grupo de ensayos. No obstante, antes de efectuar la predicción, se "informa" al sujeto sobre la puntuación obtenida comparándola con un grupo de referencia ficticio. En una condición experimental (Factor B), al sujeto se le dice que su puntuación está por *encima del promedio* (b_1) del grupo de referencia; en la segunda se le dice que está *en el promedio* (b_2), y en la tercera que está por *debajo del promedio* (b_3). Además, hay dos grupos de referencia con los que comparar a los sujetos (Factor A): el primer grupo se compone de *varones universitarios* (a_1) y el segundo es de *atletas profesionales* (a_2).

La variable dependiente que se registró es la puntuación que el sujeto predice que va a obtener en el siguiente conjunto de ensayos, y es esta puntuación la que se toma como una cuantificación de su nivel de aspiración. Cada sujeto fue entrevistado por separado y no se permitía la comunicación con los otros sujetos hasta que no acabó el experimento. Se asignó 10 sujetos a cada grupo de forma aleatoria, y las puntuaciones predichas por ellos fueron las siguientes:

	a_1			a_2	
b_1	b_2	b_3	b_1	b_2	b_3
52	28	15	38	43	23
48	35	14	42	34	25
43	34	23	42	33	18
50	32	21	35	42	26
43	34	14	33	41	18
44	27	20	38	37	26
46	31	21	39	37	20
46	27	16	34	40	19
43	29	20	33	36	22
49	25	14	34	35	17

7.8.1 Preguntas

1. En el diseño planteado sólo una de las siguientes tres afirmaciones es cierta:
    a. Los dos efectos principales son significativos
    b. Sólo el efecto principal del Factor B es significativo
    c. Son significativos el efecto principal del factor B y el efecto de interacción
2. El resultado de la razón básica [AB] para el cálculo de las sumas de cuadrados es.
    a. 66228,8
    b. 54789,5
    c. 45791,9
3. El valor de la razón F para contrastar el efecto principal del factor A es:
    a. 34,007
    b. 0,358
    c. 4,574
4. El valor de La Media Cuadrática Error $\left(MC_{S/AB}\right)$ es:
    a. 11,911
    b. 25,346
    c. 4,225
5. ¿Cuántos efectos simples hay en este diseño?
    a. 6
    b. 5
    c. 4
6. ¿Cuál es el valor de la F teórica con el que comparar el valor razón F obtenida en el contraste de la interacción?
    a. 3,168
    b. 4,019
    c. 5,346
7. ¿Cuál es el valor de la F observada para el contraste de la interacción?
    a. 34,007
    b. 2,356
    c. 8,254

8. De todos los efectos simples posibles, ¿cuántos de ellos resultan ser estadísticamente significativos?

a. Dos

b. Tres

c. Todos

9. La suma de las sumas de cuadrados de todos los efectos simples del Factor A, vale en total

a. 814,4

b. 5804,27

c. 810,13

7.8.2 Soluciones ejercicios de autoevaluación

Comencemos con algunas tablas intermedias, tanto de los datos como de las matrices AB, una con los sumatorios y otra con las medias (resaltado en negrilla estás las diferentes respuestas con resultados numéricos)

	a_1			a_2		
	b_1	**b_2**	**b_3**	**b_1**	**b_2**	**b_3**
	52	28	15	38	43	23
	48	35	14	42	34	25
	43	34	23	42	33	18
	50	32	21	35	42	26
	43	34	14	33	41	18
	44	27	20	38	37	26
	46	31	21	39	37	20
	46	27	16	34	40	19
	43	29	20	33	36	22
	49	25	14	34	35	17
Media	46,4	30,2	17,8	36,8	37,8	21,4
Suma	464	302	178	368	378	214

Matriz AB de sumas			
	a_1	**a_2**	**Suma**
b_1	464	368	832
b_2	302	378	680
b_3	178	214	392
Suma	944	960	1904

Matriz AB de Medias			
	a_1	**a_2**	**Medias**
b_1	46,400	36,800	41,600
b_2	30,200	37,800	34,000
b_3	17,800	21,400	19,600
Medias	31,467	32,000	31,733

Razones Básicas

$$[\boldsymbol{T}] = \frac{11904^2}{(2)(3)(10)} = \mathbf{60420,2667}$$

$$[\boldsymbol{Y}] = 52^2 + 48^2 \ldots + 22^2 + 17^2 = \mathbf{66872}$$

$$[\boldsymbol{A}] = \frac{944^2 + 960^2}{(3)(10)} = \mathbf{60424,5333}$$

$$[\boldsymbol{B}] = \frac{832^2 + 680^2 + 392^2}{(2)(10)} = \mathbf{65414,4}$$

$$[\boldsymbol{AB}] = \frac{464^2 + 368^2 + \cdots + 178^2 + 214^2}{(10)} = \mathbf{66228,8}$$

A partir de estas razones se construye la siguiente tabla resumen de ANOVA, en donde ya hemos incorporado los efectos simples.

FV	SC	gl	MC	$F_{empírica}$	$F_{teórica}$	Sig.
SC_A	4,267	1	4,267	0,358	4,020	
SC_B	4994,133	2	2497,067	209,642	3,168	***
SC_{AB}	810,133	2	405,067	34,007	3,168	***
SC_{AB1}	460,800	1	460,800	38,687	4,020	***
SC_{AB2}	288,800	1	288,800	24,246	4,020	***
SC_{AB3}	64,800	1	64,800	5,440	4,020	***
SC_{BA1}	4113,867	2	2056,933	172,690	3,168	***
SC_{BA2}	1690,400	2	845,200	70,959	3,168	***
$SC_{S/AB}$	643,200	54	11,911			
SC_T	6451,733	59				

*** Estadísticamente significativos con probabilidad p < 0,05

El cálculo para, por ejemplo, la suma de cuadrados de uno de los efectos principales sería:

$$SC_{AB1} = \frac{464^2 + 368^2}{10} - \frac{832^2}{(2)(10)} = \mathbf{460,800}$$

7.8.3 Respuestas

1. C
2. A
3. B
4. A
5. B (desde SC_{AB1} a SC_{BA2})
6. A
7. A
8. C
9. A (460,800 + 288,800 + 64,800 = 814,400)